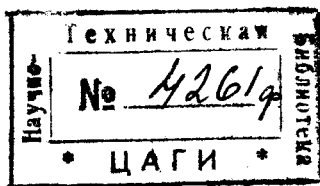


В. В. ГОЛУБЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ РАЗРЕЗНОГО КРЫЛА

Часть I

ТЕОРИЯ ПРЕДКРЫЛКА
В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОТОКЕ



КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящая работа ставит целью изучение влияния предкрылка на подъемную силу основной части крыла в плоскопараллельном потоке. Разбор экспериментальных данных показывает, что влияние предкрылка сказывается в увеличении тех углов атаки, до которых крыло может работать в условиях полного обтекания. В настоящей работе изучается влияние предкрылка на отрыв струй от поверхности крыла.

Решение этой задачи в общем случае представляет большие трудности. В работе дается приближенное решение, причем предкрылок заменяется одним вихрем, но форма основной части крыла сохраняется. Для определения точки отрыва струй от поверхности крыла применяется теория отрыва струй Прандтля, основанная на теории пограничного слоя.

В первой главе изучаются экспериментальные данные и даются общие формулы, позволяющие учесть влияние вихрей, близких к крылу, на величину подъемной силы и лобового сопротивления.

Во второй главе для определения точки отрыва струй от поверхности крыла применяется метод Прандтля-Кармана в форме, данной Польгаузенем. Решить задачу оказывается возможным благодаря тому, что распределение давлений на верхней поверхности крыла, как показывают экспериментальные данные и теория, следует достаточно точно линейному закону от точки, где давление наименьшее, до точки отрыва струй. Это соображение позволяет проинтегрировать уравнение Польгаузена и найти положение точки отрыва струй в зависимости от угла атаки. Далее изучается вопрос о влиянии толщины крыла на точку отрыва и определяется наимыгоднейшая величина утолщения крыла и характер кривой Лилиенталя для толстых крыльев.

В главе третьей дается формула, позволяющая учесть влияние предкрылка на отрыв струй, приводятся конструктивные выводы, вытекающие из предыдущей теории, и влияние основной части крыла на предкрылок.



30.10.1939

Редактор Ф. С. Шаховской. Техред А. В. Любецкий. Сдано в набор 20/V 1932 г. Подписано к печати 2/II 1933 г. Формат бум. $72 \times 105/_{46}$. Колич. печ. лист. $4\frac{1}{2}$. Колич. знак. в печ. листе 68 172. ОНТИ № 157. Индекс АА-20-5-4(2). Уполномоченный Главлита № В-37634. Заказ № 1847. Тираж 4 000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Краткое содержание	2
Предисловие	4

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Экспериментальные данные; постановка задач; основные уравнения

1. Современное положение; литература	5
2. Экспериментальные данные; поляры Лилиенталя	6
3. Экспериментальные данные; спектры обтекания	9
4. Об отрыве струй; постановка задачи	10
5. Общая формула о действии вихрей	12
6. Механическое истолкование предыдущих результатов; круглый цилиндр	17
7. Приложение общей теоремы к разрезному крылу; подъемная сила	18
8. Приложение общей теоремы к крылу; лобовое сопротивление	20
9. Лобовое сопротивление по поляре Лилиенталя	22

ГЛАВА ВТОРАЯ

Определение точки отрыва струй от поверхности крыла

1. Теория пограничного слоя. Уравнения Прандтля, Кармана, Польгаузена	25
2. Распределение скоростей на поверхности крыла	27
3. Распределение давлений на поверхности крыла	31
4. Случай плоской пластинки	34
5. Экспериментальные данные	36
6. Интегрирование уравнения Польгаузена для случая крыла	37
7. Предельные углы атаки	41
8. Перемещение точки отрыва на поверхности крыла	44
9. Обобщение предшествующих результатов	47

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Теория работы предкрылка

1. Общие соображения	52
2. Основная формула	55
3. Определение скорости у предкрылка	56
4. Окончательные формулы для предкрылка; приближенное решение	58
5. Точная формула	61
6. Конструктивные выводы	63
7. Экспериментальные данные	64
8. Действие крыла на предкрылок	66
9. Распределение скоростей у поверхности предкрылка	68
10. Замечания о распределении давлений у крыла	70
Summary	71

Предисловие

Предложенные еще 10 лет назад Лахманом и Хэндлей-Пэджем разрезные крылья до настоящего времени не изучены сколько-нибудь подробно с точки зрения аэродинамики. Кроме фундаментальной работы С. А. Чаплыгина, посвященной теории частного типа разрезного крыла, которое работает в условиях полного обтекания, можно указать только ряд мелких замечаний, весьма мало выясняющих аэродинамическую сущность их работы. Настоящее исследование представляет собой попытку дать аэродинамическую теорию разрезного крыла, состоящего из основной части и из добавочного маленького крыла, поставленного у передней кромки основной части, так называемого предкрылка.

Основой всей предлагаемой теории является теория пограничного слоя Прандтля и вытекающая из нее возможность теоретического определения точки отрыва струй от поверхности крыла. Влиянием предкрылка на положение точки отрыва струй и объясняется вся работа разрезного крыла, состоящего из крыла и предкрылка. Исследование ведется для крыла в плоскопараллельном потоке. В дальнейшем мы надеемся вернуться к учету влияния концов предкрылка, т. е. к аэродинамической теории разрезного крыла конечного размаха.

Изложенная ниже теория, повидимому, полностью не переносится на случай разрезного крыла, состоящего из основной части крыла и добавочного меньшего крыла, поставленного около задней кромки основной части, так называемого закрылка. Для этого случая основы аэродинамической теории надо искать в идеях, изложенных в работе С. А. Чаплыгина.

Экспериментальные данные; постановка задач; основные уравнения

§ 1. Современное положение; литература. § 2. Экспериментальные данные; полярные Лилиенталя. § 3. Экспериментальные данные; спектры обтекания. § 4. Об отрыве струй; постановка задачи. § 5. Общая формула о действии вихрей. § 6. Механическое истолкование предыдущих результатов; круглый цилиндр. § 7. Приложение общей теоремы к разрезному крылу; подъемная сила. § 8. Приложение общей теоремы к крылу; лобовое сопротивление. § 9. Лобовое сопротивление по полярке Лилиенталя.

§ 1. Теория дужек в настоящее время изучена настолько, что в этой области едва ли возможно ждать какого-нибудь существенного улучшения их аэродинамических свойств; повидимому, теоретическим пределом аэродинамических свойств являются формы дужек, мало отличающихся от инверсии параболы. Значительного прогресса в этом направлении можно ожидать только в другом направлении, в применении ряда дополнительных приспособлений, сильно влияющих на аэродинамические свойства потока, обтекающего крыло; сюда относятся такие приспособления, как подсосывание пограничного слоя крыла¹, помещение дополнительных насадков на крыло² и т. п. Однако в настоящее время до технического осуществления, применяемого довольно широко в современном самолетостроении, доведена только одна из самых первых попыток в этом направлении — разрезные крылья.

Как известно, разрезные крылья были почти одновременно предложены в Германии Лахманом и в Англии Хэндли-Пэджд еще в 1921 г. Сущность изобретения сводится к тому, что к основному крылу добавляется или маленькое добавочное крыло около передней кромки основного крыла (предкрылок), или добавочное крыло около задней кромки основного крыла (закрылок). В более общем случае к основному крылу добавляются одновременно и предкрылок и закрылок; кроме того, делались попытки и самое основное крыло заменять рядом более мелких крыльев, расположенных друг за другом.

Несмотря на то, что разрезные крылья известны уже более 10 лет и получили достаточно широкое распространение в технике, теория их до настоящего времени находится в зачаточном состоянии. Среди довольно значительной литературы, содержащей экспериментальный материал по разрезным крыльям, можно указать очень мало работ, посвященных теории разрезных крыльев. Можно указать только одну фундаментальную теоретическую работу С. А. Чаплыгина³, в которой дана весьма подробная теория одного частного типа разрезных крыльев, исходя из предположения, что крыло работает в условиях полного обтекания идеальной жидкостью. Кроме того можно указать ряд работ в иностранной литературе, где имеются некоторые теоретические соображения о работе разрезных крыльев; сюда надо отнести прежде всего работу Лахмана⁴, в которой рассматривается структура потока, обтекающего разрезное крыло; далее работу Бетца⁵, в которой крыло с пред-

¹ O. Schrenk „Versuche mit einem Absaugeflügel“, „Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt“ № 9, S. 259; 1931.

² См. например, O. Krell, Druckverteilung an der Luftumströmten Kugel. „Zeitschr. f. F. u. M.“, Jahrgang 22, Heft, 4, S. 97; 1931.

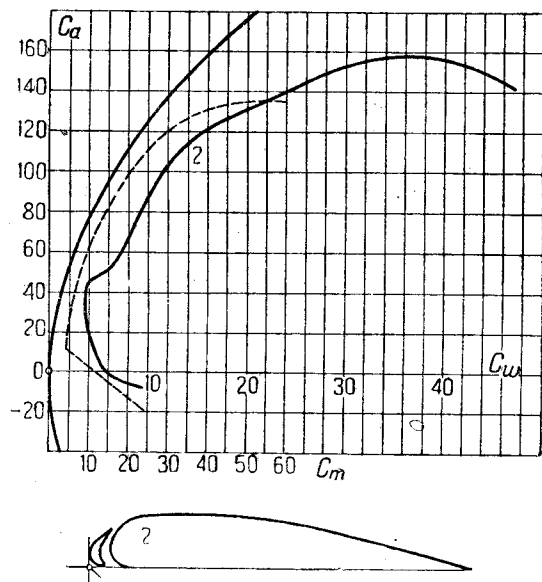
³ С. А. Чаплыгин, „Схематическая теория разрезного крыла аэроплана“. „Научно-технич. вестник“, 1921, № 4—5, стр. 21.

⁴ Lachmann G., Die Strömungsvorgänge an einen Profil mit Vorgelagerten Hilfsflügel L. f. F. u. M. Jahrgang 14, 1923.

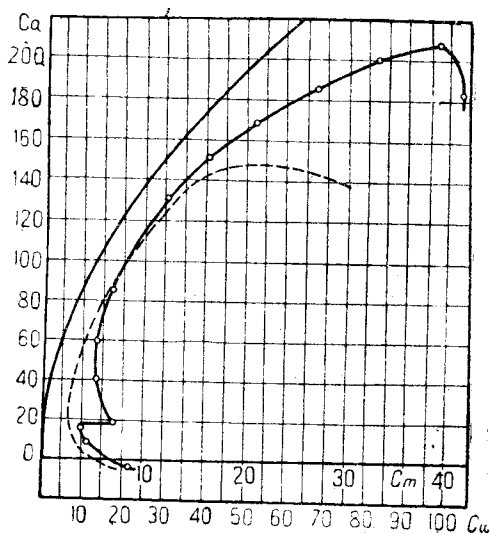
⁵ Betz A., Die Wirkungsweise von unterteilten. Flugprofilen, Berichte und Abh. der Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt, 1922, Januar.

крылом рассматривается как частный случай биплана. Кроме того, можно указать ряд теоретических замечаний Прандтля, Бетца, Клемперера и др. Но во всех перечисленных работах нет никакой законченной теории с точки зрения учета вязкости воздуха, которая, повидимому, во всех явлениях, связанных с улучшением работы крыла, играет существенную роль.

Отсутствие законченных теоретических представлений о работе разрезного крыла ведет к тому, что и обильный экспериментальный материал недостаточно использован для получения общих выводов о целесообразности того или иного положения отдельных частей, что иногда приводит к совершенно неправильному представлению о работе крыла¹; точно так же, благодаря отсутствию теоретических соображений, и дальнейшее усовершенствование разрезных крыльев ведется путем экспериментальных исследований в значительной степени вслепую. Все это показывает, что при настоящем положении



Фиг. 1.



Фиг. 2.

дел теоретические изыскания в области разрезных крыльев являются одной из актуальных задач теории крыла и аэродинамической теории самолета.

Настоящая работа ставит своей задачей дать возможно полную теорию в простейшем случае, когда мы имеем крыло с предкрылком, при этом учитывается влияние вязкости воздуха путем систематического применения теории пограничного слоя Прандтля.

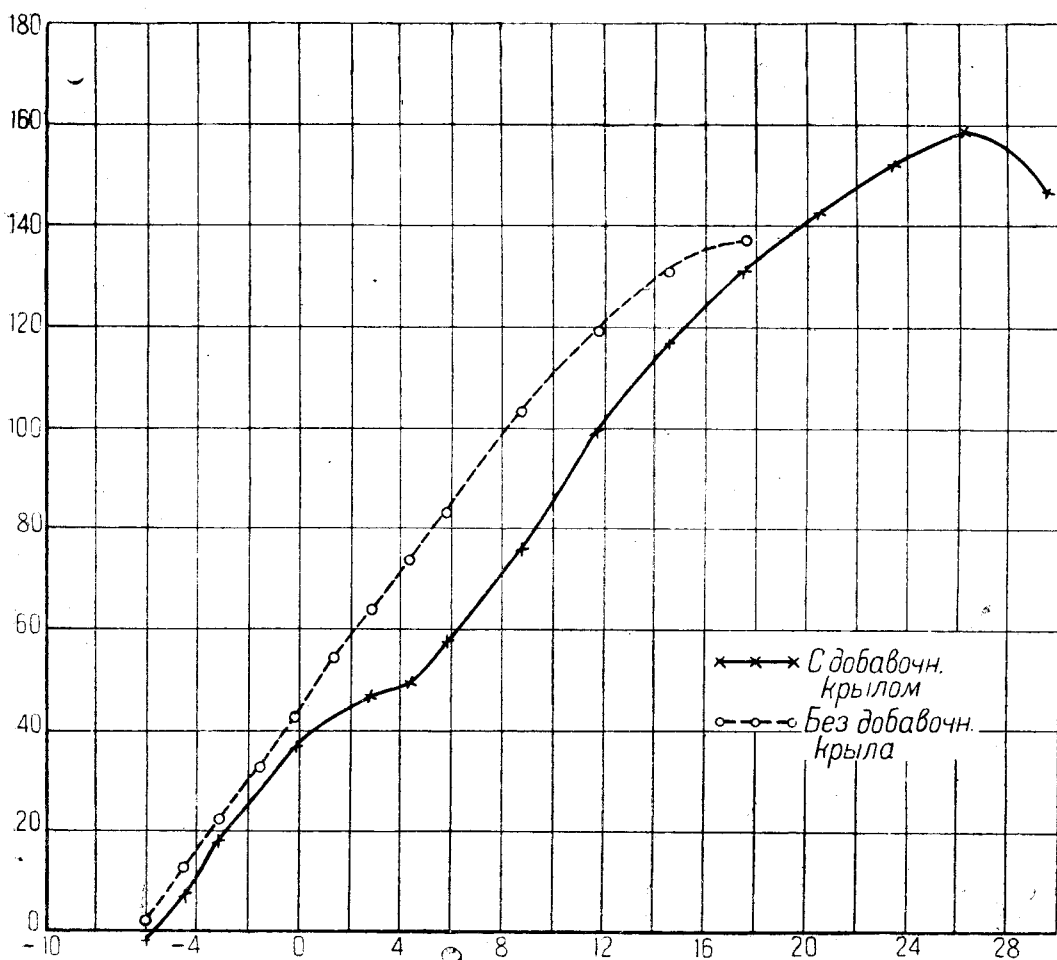
§ 2. Основной вопрос, который возникает при построении теории разрезного крыла, — это вопрос о том, в чем сказывается влияние предкрылка на работе всего крыла. В основном экспериментальные данные приводят к следующему.

Весьма чувствительным мерилем работы крыла является его полярная диаграмма Лилиенталя. Рассмотрим данные некоторых экспериментов, проведенных для разрезных крыльев в лаборатории Прандтля в Геттингене².

На фиг. 1 даны диаграммы Лилиенталя для крыла сплошного (пунктиром) и для разрезного крыла с предкрылком (сплошной линией). На фиг. 2 даны

¹ См. например Klemperer W., Ein Beitrag zum Spaltflügelprofil Abh. aus Aerodyn. Inst. a. d. technischen Hochschule zu Aachen. H. 2, s. 1—8, также его замечания по докладу Betz'a; VII ordentliches Versammlung der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt 4-8/IX 1921.

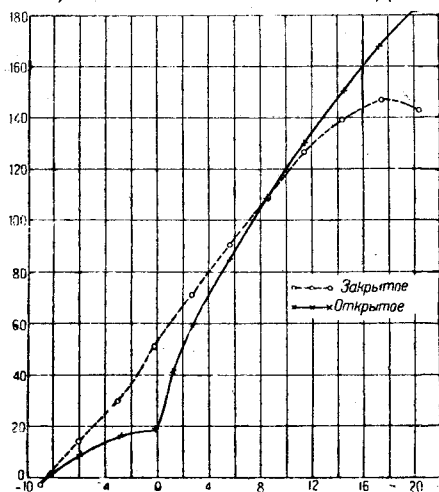
² Ergebnisse d. Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II Lieferung. 1923. S. 56, H. 59.



Фиг. 3.

диаграммы Лилиентала для крыла с вращающимся предкрылком; пунктиром дана полярная диаграмма, когда предкрылок задней кромкой прижат к крылу и, следовательно, крыло работает, как сплошное, сплошной же линией дана полярная диаграмма для крыла с открытой щелью и, следовательно, крыло работает здесь, как разрезное. Из рассмотрения полученных диаграмм мы видим, что у разрезного крыла при малых углах атаки лобовое сопротивление значительно больше, чем у сплошного; при этом при очень малых углах атаки сопротивление разрезного крыла весьма мало превосходит сопротивление соответствующего неразрезного. Если построить для рассматриваемого случая график коэффициента подъемной силы, пользуясь данными Геттингенской лаборатории, в зависимости от угла атаки, то получим следующие графики (фиг. 3 и 4).

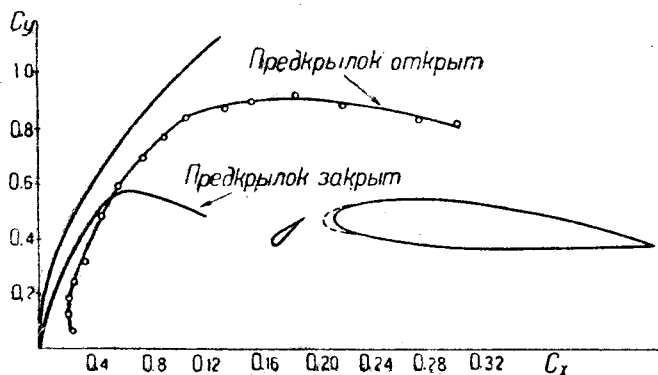
Аналогичные результаты получим и из рассмотрения следующих данных



Фиг. 4.

Хэндли-Пэджд¹ фиг. 5, 6. Здесь мы также видим увеличение лобового сопротивления.

Если рассматривать графики подъемной силы в зависимости от угла атаки, то увидим, что подъемная сила у разрезного крыла при малых углах атаки, при которых работают крылья сплошные, меньше, чем у сплошного крыла. Но подъемная сила возрастает для разрезного крыла, следуя



Фиг. 5.

приблизительно линейному закону, до углов значительно больших, чем для крыла сплошного (для крыла Хэндли-Пэдж с 10 до 20—22°, в крыле Прандтля с 16 до 20°). Так как резкое уклонение изменения подъемной силы в зависимости от угла атаки от линейного закона, или, что то же, резкое уклонение кривой Лилиентала от линии, эквидистантной параболе индуктивного сопротивления

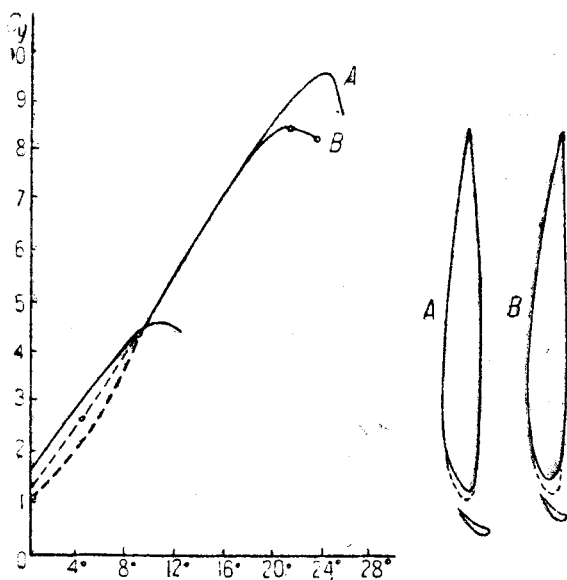
ния, указывает на то, что крыло работает не на обтекание, а на срыв, то отсюда следует, что разрезное крыло работает на обтекание до больших углов, чем сплошное.

Таким образом экспериментальные данные приводят к следующим выводам:

1. При тех углах, при которых крыло разрезное и сплошное, полученное из раздвижного крыла закрытием щели, оба работают в условиях более или менее полного обтекания, *разрезное крыло с предкрылком не дает увеличения подъемной силы*, наоборот, оно дает некоторое (незначительное) ее уменьшение.

2. В присутствии предкрылка крыло работает на обтекание при углах, значительно превосходящих соответствующие углы для сплошного крыла, следовательно, *присутствие предкрылка увеличивает угол атаки, при котором начинается срыв струй*.

3. При очень малых углах атаки лобовое сопротивление незначительно превосходит лобовое сопротивление сплошного крыла; *при углах атаки, более значительных, лобовое сопротивление разрезного крыла значительно больше, чем сплошного*, и это отношение сохраняется до углов, при которых начинается отрыв струй от сплошного крыла, что влечет за собой резкое увеличение лобового сопротивления.

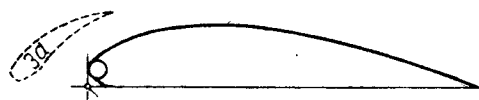
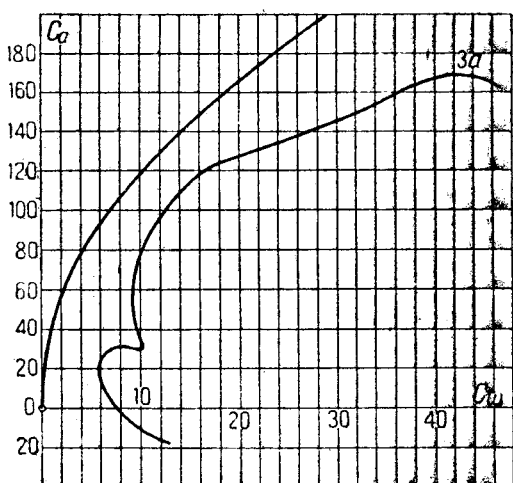


Фиг. 6.

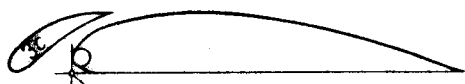
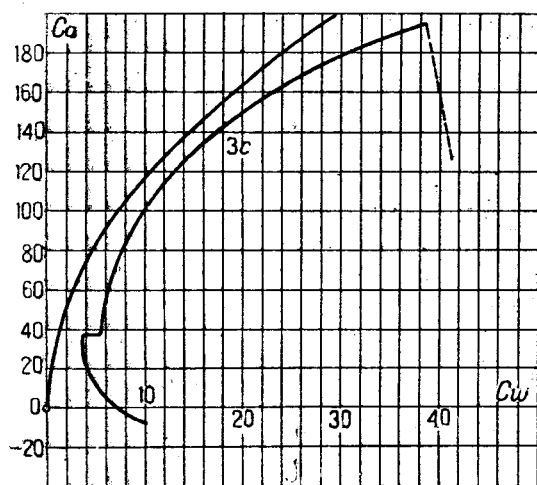
¹ Handley Page, Neuere Forschungen am „Handley Page“ Spaltflügel. Fortschritte der Luftfahrt. Jahrbuch, 1929—1930.

Интересно отметить, что экспериментальные данные указывают на очень сильную зависимость формы кривой Лилиенталя, в частности, положения точки, где начинается резкое увеличение лобового сопротивления, от положения предкрылка относительно основного крыла. Фиг. 7 показывает, как изменяется форма кривой Лилиенталя при изменении положения предкрылка.

Отсюда видно, что приближение предкрылка к передней кромке крыла смягчает скачок изменения лобового сопротивления и отодвигает его на большие углы атаки. Отсюда, в частности, возникает вопрос, нельзя ли рациональным помещением предкрылка добиться перемещения резкого увеличения лобового сопротивления на такие углы атаки, которые превосходят углы, обычно применяемые во время полета, так как при такой конструкции при неподвижном предкрылке разрезное крыло при обычных летных углах работает как крыло сплошное, а при больших углах атаки получается значительно большая подъемная сила, чем для крыла сплошного. Как известно, этот результат достигается в современных конструкциях раздвижным предкрылком, который при малых углах плотно придвигается к крылу и крыло работает как сплошное, а при



Фиг. 7а.



Фиг. 7б.

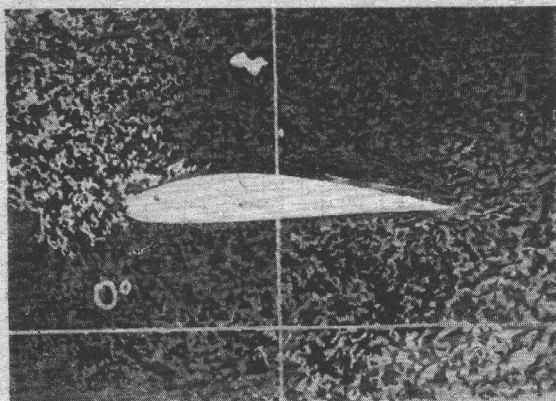
больших углах системой рычагов отодвигается от основного крыла и крыло работает как раздвижное.

§ 3. Кроме поляр Лилиенталя можно использовать для экспериментальной оценки работы разрезного крыла снимки спектров течения потока вокруг разрезного и неразрезного крыла. Такого рода снимки дают чрезвычайно поучительный материал, но, к сожалению, в этом направлении еще очень мало сделано.

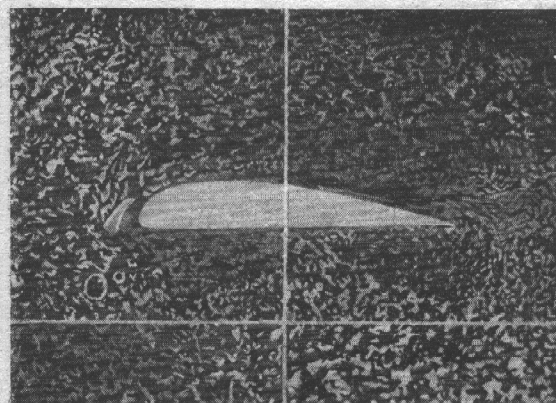
Мы приведем ряд снимков для иллюстрации обтекания тонких и толстых крыльев разрезных и для сравнения соответствующих сплошных, приведенных в работе Хэндли-Пэдж¹.

На фиг. 8—12 приведены спектры обтекания двух крыльев с соответствующими предкрылками и обтекания сплошных крыльев при различных углах атаки.

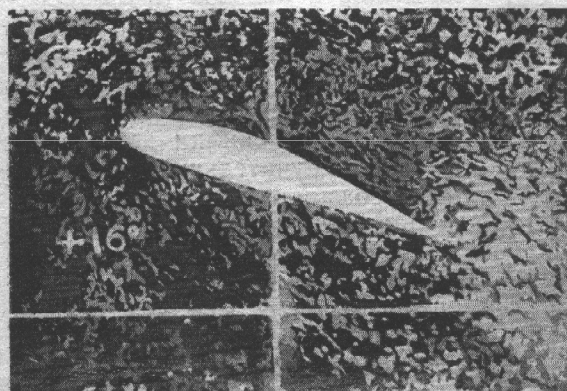
¹ Hendley Page, Neuere Forschungen am „Handley Page“ Spaltflügel. Fortschritte f. Luftfahrt, Jahrbuch, 1929 — 1930.



Фиг. 8a.



Фиг. 8b.



Фиг. 9a.

Вопрос об отрыве струй в современной аэродинамике решается с двух различных точек зрения. Попытки решения, основанные на применении теории идеальной жидкости, привели к методу, разработанному для простейших случаев в работах Кирхгофа, Рэлей, Митчеля, Жуковского¹, а позд-

Первая серия снимков относится к крылу толстого профиля.

На этих снимках мы видим следующее:

1. При угле атаки 0° присутствие предкрылка не улучшает обтекания крыла; наоборот, в присутствии предкрылка за крылом образуется более вихрей, чем за крылом сплошным.

2. При больших углах атаки в присутствии предкрылка получается плавное обтекание на таких углах атаки, при которых крыло сплошное работает на срыв. На снимках это сказывается в образовании сильных вихрей у передней кромки (фиг. 10) в случае отрыва струй; при том же угле атаки крыло, работающее с предкрылком, работает на обтекание, так что за крылом почти не образуется вихрей.

Такие же выводы можно получить из рассмотрения спектров более тонких крыльев.

На фиг. 12 видна сильно развитая система вихрей за верхней поверхностью крыла сплошного и весьма плавное обтекание у такого же разрезного крыла; заметим, что и у этого крыла при малом угле атаки (9°) разрезное крыло не вносит никакого заметного изменения в обтекание.

§ 4. Из экспериментальных данных предшествующего параграфа следует, что работа предкрылка сводится к увеличению предельных углов, при которых крыло работает на обтекание. Следовательно, теоретическое изучение работы предкрылка сводится к решению следующих двух основных задач:

а) выяснить, при каких условиях начинается отрыв струй на верхней поверхности крыла;

б) выяснить, каким образом предкрылок влияет на условия, вызывающие отрыв струй.

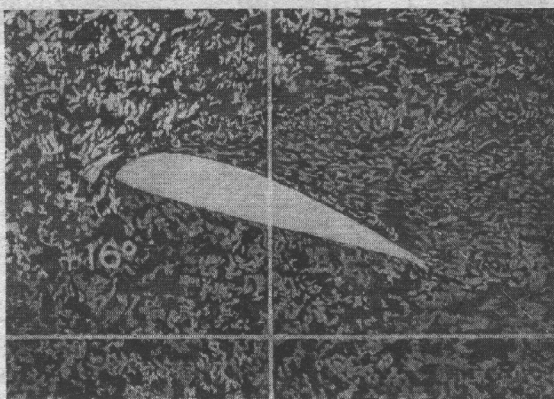
¹ Например Н. Е. Жуковский, О видоизменении метода Кирхгофа. Соч. т. II. вып. 2; также В. В. Голубев. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, гл. V.

нее в значительно усовершенствованном виде в методах Леви-Чивита и Вилля¹, и до настоящего времени для случая кринолинейных обтекаемых контуров удалось провести в очень ограниченном числе случаев; здесь необходимо отметить работы об обтекании дуги круга А.И. Некрасова² и об обтекании дуги параболы Н. С. Аржаникова³. К сожалению, этот метод, представляя очень большие аналитические трудности, до сих пор не получил приложения к определению точек отрыва у контуров типа контура крыльев.

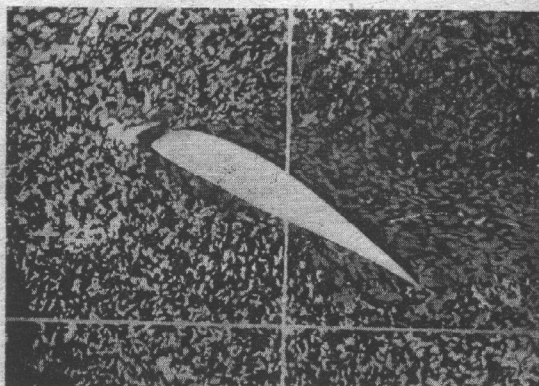
Другой метод, основанный на применении теории пограничного слоя, развитый в работах Прандтля, Блязюса, Кармана, Польгаузена и др.⁴, также представляет большие аналитические затруднения и до сих пор с успехом был применен только к случаю пластинки и к случаю круглого цилиндра. В дальнейшем мы увидим, как *этим методом может быть приближенно решен вопрос об отрыве струи от поверхности крыла*.

Второй основной вопрос о влиянии предкрылка на условия обтекания потоком крыла аэроплана также можно решать различными методами. В общем виде эта задача представляет собой частный случай теории биплана и приводит к эллиптическим функциям.

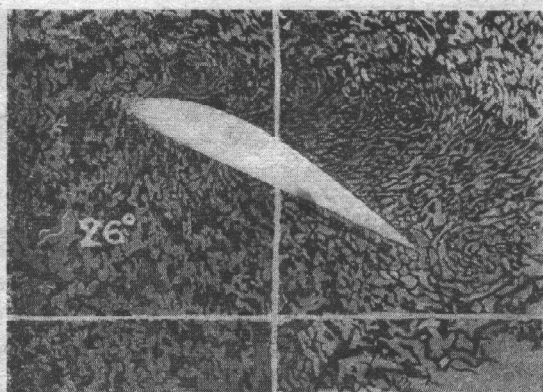
Частный случай, когда предкрылок и основное крыло представляют собой дуги одной и той же окружности, был до конца решен в работе С. А. Чаплыгина⁵. Однако в рассматриваемом случае дело упрощается тем, что размеры предкрылка малы сравнительно с размерами крыла; поэтому, как первое приближение, *можно заменить предкрылок одним вихрем неподвижно закреп-*



Фиг. 9b.



Фиг. 10a.



Фиг. 10b.

¹ См. например Villat, Apersu théorique sur la résistance des fluides.

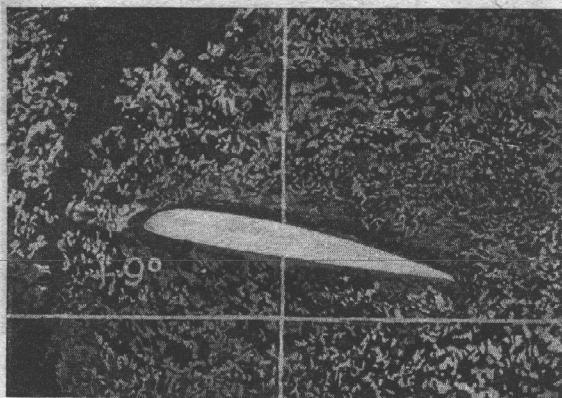
² Известия Ив.-Возн. политехнического института, 1924.

³ Математический сборник, 1928.

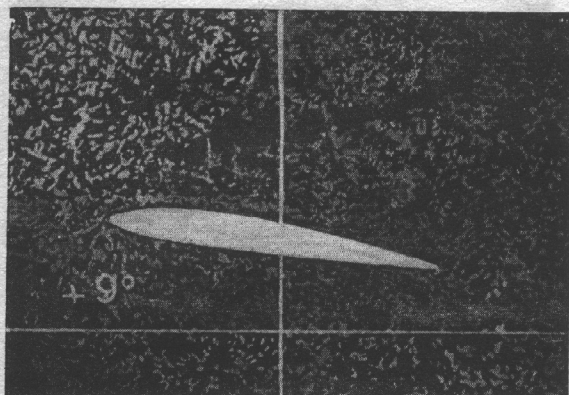
⁴ Prandtl, Vier Abhandlungen f. Hydro und Aerodynamik, S. 7.

⁵ С. А. Чаплыгин, Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. Научно-технический вестник, 1921, № 4-5, стр. 21.

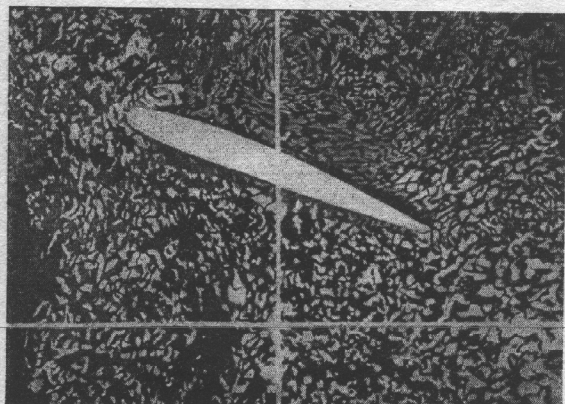
ленным и входящим, следовательно, вихрей разрезного крыла. На первый



Фиг. 11a.



Фиг. 11b.



Фиг. 12a.

в систему присоединенных взгляд может показаться, что такая схема дает результат чрезмерно грубый и потому мало полезный; но не нужно забывать, что в основе всей теории Прандтля лежит еще более грубое допущение, состоящее в том, что вся вихревая несущая система крыла заменяется одним вихрем переменной циркуляции; тем не менее интегральные результаты, касающиеся величины подъемной силы, величины лобового сопротивления, скоса потока и т. п., оказываются вполне удовлетворительными; только в таких вопросах, как определение точки приложения сил давления, распределение скоростей около крыла и т. д. теория Прандтля оказывается совершенно недостаточной и ее приходится дополнять, применяя, например, теорию плоскопараллельного потока к отдельным элементам крыла.

Таким образом мы будем рассматривать обтекание крыла в присутствии неподвижного вихря, неразрывно связанного с крылом.

§ 5. Мы начнем с рассмотрения общей задачи о работе крыла, обтекаемого потоком в случае, если около крыла имеется система неподвижно связанных с крылом вихрей.

Пусть на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ имеется крыло (фиг. 13), около которого имеется система вихрей J_k , оси которых находятся в точках ζ_k . Отобразим плоскость ζ на плоскость $z = x + iy$ таким образом, чтобы внешняя область крыла перешла во внешнюю часть окружности $|z| = 1$ (фиг. 14). Тогда вихри перейдут в некоторые точки b_k плоскости z и задняя острая кромка b перейдет в точку $z = 1$, а точка $\zeta = \infty$ перейдет в точку $z = \infty$ (фиг. 13). Тогда характеристическая функция обтекания цилиндра получится в виде:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \sum \frac{1}{2\pi i} \frac{J_k}{z - b_k} - \sum \frac{1}{2\pi i} \frac{J_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

где V_{∞} и θ — скорость потока, обтекающего цилиндр, и угол, образо-

ванный ею с осью x , Γ — основная циркуляция вокруг крыла, b_k и a_k — оси добавочных вихрей, причем $b_k = \frac{1}{a_k} (\bar{a} - \text{сопряженное с } a)$, так что точки b_k и a_k лежат на одной прямой, проходящей через начало.

Пусть $\xi = \chi(z)$ функция, дающая конформное отображение плоскости z ; как известно, вне окружности $|z|=1$ для $\chi(z)$ имеем разложение:

$$\xi = az + b + \frac{c}{z} + \frac{d}{z^2} + \dots$$

Тогда, называя через X и Y компоненты подъемной силы на плоскости ξ , получим по формуле Чаплыгина-Блязуса:

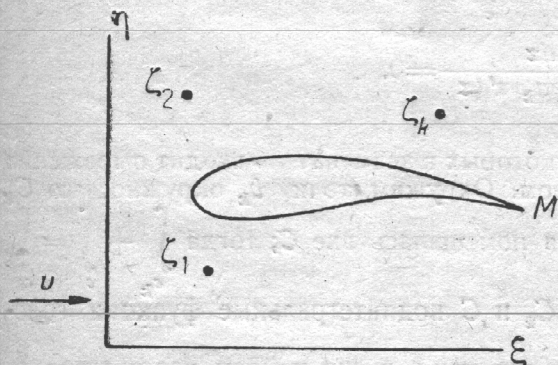
$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_c \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{d\xi} dz,$$

где c — любой контур, охватывающий окружность L и не заключающий точек b_k .

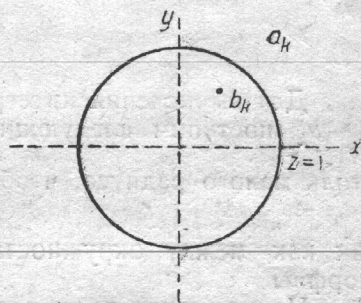
Отсюда, подставляя (1), имеем:

$$J + iX = -\frac{\rho}{2} \int_c \left\{ V_\infty e^{-i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{J_k}{z - b_k} - \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{J_k}{z - a_k} \right\}^2 \frac{dz}{\chi'(z)}. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла применим теорию вычетов. Так как на контуре и вне контура $\chi'(z)$ везде конечно, то полюсами подинтегральной



Фиг. 13.



Фиг. 14.

функции внутри C будут точки $z=0$ и $z=a_k$. Найдем вычеты всех этих полюсов:

$$\begin{aligned} Y + iX = & -\frac{\rho}{2} \int_c \left\{ V_\infty^2 e^{-2i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right)^2 + \frac{\Gamma}{(2\pi i)^2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k^2}{(z - b_k)^2} + \right. \\ & + \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k^2}{(z - a_k)^2} + 2V_\infty e^{-i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \\ & + 2V_\infty e^{-i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{J_k}{z - b_k} - 2V_\infty e^{-i\theta} \left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{J_k}{z - a_k} + \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\Gamma}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k}{z(z-b_k)} - 2 \frac{\Gamma}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k}{z(z-a_k)} + \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k J_e}{(z-b_k)(z-b_e)} - \\ - \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k J_e}{(z-a_k)(z-a_e)} - \frac{2}{(2\pi i)^2} \sum \frac{J_k J_e}{(z-b_k)(z-a_e)} \left\} \frac{dz}{\chi'(z)}. \quad (3)$$

Вычисление всех интегралов формулы (2) представляет ту трудность, что поведение функции $\chi(z)$ внутри окружности $|z|=1$ неизвестно, а потому нельзя применять непосредственно теорему Коши к внутренней части кривой C . Что касается поведения $\chi(z)$ вне окружности $z=1$, то там $\chi'(z)$ нигде не обращается в нуль, так как вне окружности функция $\chi(z)$ дает везде конформное отображение; следовательно, $\frac{1}{\chi'(z)}$ вне окружности $|z|=1$ везде голоморфно.

Отсюда следует, что интегралы, у которых в подинтегральной функции в знаменатель не входит разность $(z-b_k)$, можно брать вместо окружности $|z|=1$ по любой кривой, содержащей внутри себя эту окружность, мы будем брать эти интегралы по окружности C_1 бесконечно большого радиуса с центром в начале:

$$\int_c \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right)^2 \frac{dz}{\chi'(z)} = 0; \quad \int_c \frac{dz}{z^2 \chi'(z)} = 0; \quad \int_c \frac{dz}{(z-a_k)^2 \chi'(z)} = 0;$$

$$\int_c \frac{dz}{(z-a_k)(z-a_e) \chi'(z)} = 0;$$

$$\int_c \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{z \chi'(z)} = \int_c \frac{dz}{z} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{c}{a} \frac{1}{z^2} + \dots \right\} = 2\pi i \frac{1}{a};$$

$$\int_c \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z-a_k) \chi'(z)} = \int_c \frac{dz}{(z-a_k) \chi'(z)} = 2\pi i \frac{1}{a};$$

$$\int_c \frac{dz}{z(z-a_k) \chi'(z)} = 0.$$

Для вычисления интегралов, в которых в знаменатель входит выражение $z-b_k$, поступим следующим образом. Окружим точку b_k окружностью C_k столь малого радиуса, чтобы C_k вся помещалась вне C ; тогда $\int_{c_k} + \int_c = \int_{c_1}$.

так как между окружностями C , C_k и C_1 подинтегральные функции голоморфны.

Но, применяя те же преобразования, как и выше, найдем, что интегралы, которые в знаменателе имеют произведения $(z-a_k)(z-b_k)$ или $(z-b_k)z$, или $(z-b_k)^2$ на окружности C_1 , равны 0, следовательно, для всех этих интегралов имеем:

$$\int_c = - \int_{c_k} \\ \int_c \frac{dz}{(z-b_k)^2 \chi'(z)} = + \int_{c_\infty} \frac{dz}{(z-b_k)^2 \chi'(z)} - \int_{c_k} \frac{dz}{(z-b_k)^2 \chi'(z)} = \\ = - \int_{c_k} \frac{dz}{(z-b_k)^2} \left\{ \frac{1}{\chi'(b_k)} - \frac{\chi''(b_k)}{\chi'^2(b_k)} (z-b_k) + \dots \right\} = -2\pi i \frac{\chi''(b_k)}{\chi'^2(b_k)};$$

$$\begin{aligned}
& \int_c \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z - b_k) \chi'(z)} = \int_{c_\infty} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z - b_k) \chi'(z)} - \\
& - \int_{c_k} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{z^2}\right) \frac{dz}{(z - b_k) \chi'(z)} = 2\pi i \frac{1}{a} - 2\pi i \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{b_k^2}\right) \frac{1}{\chi'(b_k)}; \\
& \int_c \frac{dz}{z(z - b_k) \chi'(z)} = \int_{c_\infty} \frac{dz}{z(z - b_k) \chi'(z)} - \int_{c_k} \frac{dz}{z(z - b_k) \chi'(z)} = -2\pi i \frac{1}{b_k \chi'(b_k)}; \\
& \int_c \frac{dz}{(z - b_k)(z - b_e) \chi'(z)} = - \int_{c_k} \frac{dz}{(z - b_k)(z - b_e) \chi'(z)} - \int_{c_e} \frac{dz}{(z - b_k)(z - b_e) \chi'(z)} = \\
& = -2\pi i \frac{1}{(b_k - b_e) \chi'(b_k)} - 2\pi i \frac{1}{(b_e - b_k) \chi'(b_e)}; \\
& \int_c \frac{dz}{(z - b_k)(z - a_e) \chi'(z)} = - \int_{c_k} \frac{dz}{(z - b_k)(z - a_e) \chi'(z)} = -2\pi i \frac{1}{(b_k - a_e) \chi'(b_k)}; \\
& Y + iX = -\rho V_\infty e^{-\theta i} \left[\Gamma \frac{1}{a} - \sum I_k \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{b_k^2}\right) \frac{1}{\chi'(b_k)} \right] + \rho \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum \frac{I_k}{b_k \chi'(b_k)} + \\
& + \rho \frac{1}{2\pi i} \sum I_k I_e \left\{ \frac{1}{(b_k - b_e) \chi'(b_k)} + \frac{1}{(b_e - b_k) \chi'(b_e)} \right\} - \\
& - \rho \frac{1}{2\pi i} \sum I_e \sum \frac{I_k}{(b_k - a_e) \chi'(b_k)} - \frac{\rho}{2} \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{I_k^2 \chi''(b_k)}{\chi'^2(b_k)}. \quad (I)
\end{aligned}$$

В случае, если вихрей I_k нет, то получаем формулу Н. Е. Жуковского

$$Y + iX = -\rho V_\infty \frac{1}{a} e^{-\theta i} \Gamma. \quad (I')$$

В случае, если есть только одна пара вихрей I , то получим:

$$\begin{aligned}
Y_1 + iX_1 = & -\rho V_\infty e^{-\theta i} \left[\Gamma \frac{1}{a} - I \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{b^2}\right) \frac{1}{\chi'(b)} \right] + \rho \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{J}{b_k \chi'(b)} - \\
& - \frac{\rho}{2} \frac{1}{2\pi i} \frac{I \chi''(b)}{\chi'^2(b)} - \frac{\rho}{2\pi i} \frac{I^2}{(b - a) \chi'(b)}. \quad (I'')
\end{aligned}$$

Отсюда влияние вихрей скажется в добавочной силе, определяемой уравнением:

$$\begin{aligned}
\Delta Y + i\Delta X = & Y_1 + iX_1 - (Y + iX) = \rho I \left[V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{b^2}\right) \frac{1}{\chi'(b)} + \right. \\
& \left. + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{b \chi'(b)} + \frac{i}{2\pi} \frac{I}{(b - a) \chi'(b)} + \frac{i}{4\pi} \frac{I \chi''(b)}{\chi'^2(b)} \right].
\end{aligned}$$

Но

$$V_\infty e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{b^2}\right) \frac{1}{\chi'(b)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{b \chi'(b)} = \left(\frac{d\omega_0}{dz} \right)_{z=b},$$

где ω_0 есть характеристическая функция при отсутствии вихрей, а потому

$$\Delta I + i\Delta X = \rho \left(\frac{d\omega_0}{dz} \right)_{z=b} \frac{I}{a \chi'(b)} + \rho \frac{IJ^2}{2\pi} \frac{1}{(b_k - a_k) \chi'(b_k)} + \rho \frac{IJ^2}{4\pi} \frac{\chi''(b_k)}{\chi'^2(b_k)} (\chi'').$$

Совершенно иной результат получится, если все вихри войдут в несущую систему присоединенных вихрей, тогда для определения силы давления потока надо брать интеграл по контуру, охватывающему все вихри.

Следовательно, в этом случае за контур интеграции можно взять окружность бесконечного радиуса C_1 . Применяя к этому случаю выведенные выше формулы и пользуясь равенством (I''), получим:

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \left\{ V_{\infty} e^{-\theta i} \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{1}{a} 2\pi i + \sum \frac{J_k V_{\infty} e^{-\theta i}}{\pi i} 2\pi i \frac{1}{a} - \sum \frac{J V_{\infty} e^{-\theta i}}{\pi i} 2\pi i \frac{1}{a} \right\} = \\ = -\rho V_{\infty} e^{-\theta i} \frac{1}{a} \Gamma. \quad (\text{II})$$

Таким образом в этом случае сила выражается совершенно такой же формулой, как и в отсутствии вихрей J_k .

Однако не следует думать, что в этом случае подъемная сила не зависит от добавочных вихрей. Легко показать, что в случае крыла циркуляция Γ зависит от величин добавочных вихрей J_k .

В самом деле, если острой задней кромке крыла соответствует точка $z=1$, то по основной гипотезе Н. Е. Жуковского:

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=1} = 0.$$

Следовательно, имеем уравнение:

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{1} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} + \sum \frac{J_k}{2\pi i} \frac{1}{1 - b_k} - \sum \frac{J_k}{2\pi i} \frac{1}{1 - a_k} = 0.$$

Отсюда:

$$\Gamma = -2\pi i V_{\infty} (e^{-\theta i} - e^{\theta i}) - \sum J_k \left(\frac{1}{1 - b_k} - \frac{1}{1 - a_k} \right), \\ \Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \theta + \sum J_k \left(\frac{1}{1 - a_k} - \frac{1}{1 - b_k} \right).$$

Легко видеть, что из этого уравнения значение Γ получается действительное. В самом деле, пусть $a_k = \rho_k e^{\alpha_k i}$, тогда $b_k = \frac{1}{\rho_k} e^{\alpha_k i}$.

Следовательно:

$$\frac{1}{1 - a_k} - \frac{1}{1 - b_k} = \frac{1}{1 - \rho_k e^{\alpha_k i}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho_k} e^{\alpha_k i}} = \frac{\left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k} \right) e^{\alpha_k i}}{1 - \left(\rho_k + \frac{1}{\rho_k} \right) e^{\alpha_k i} + e^{2\alpha_k i}} = \\ = \frac{(\rho_k^2 - 1)}{2\rho_k \cos \alpha_k - (\rho_k^2 + 1)} = \frac{1 - \rho_k^2}{1 - 2\rho_k \cos \alpha_k + \rho_k^2}.$$

Следовательно:

$$\Gamma = -4\pi V_{\infty} \sin \theta + \sum J_k \frac{(1 - \rho_k^2)}{1 - 2\rho_k \cos \alpha_k + \rho_k^2}. \quad (\text{III})$$

Так как в отсутствии вихрей:

$$\Gamma_0 = -4\pi V_{\infty} \sin \theta,$$

то

$$\Delta \Gamma = \Gamma - \Gamma_0 = \sum J_k \frac{1 - \rho_k^2}{1 - 2\rho_k \cos \alpha_k + \rho_k^2}. \quad (\text{III}')$$

Так как $\rho_k < 1$, то выражение $\frac{(1 - \rho_k^2)}{1 - 2\rho_k \cos \alpha_k + \rho_k^2}$ всегда положительно. Отсюда имеем следующий результат: *если около крыла есть вихри, то цир-*

куляция крыла меняется, причем каждый добавленный вихрь того же направления, как основная циркуляция (направление взято для вихря в точке вне крыла), увеличивает циркуляцию вокруг крыла; каждый добавленный вихрь, направленный в обратную сторону относительно основной циркуляции, уменьшает циркуляцию.

Отсюда, объединяя этот результат с предшествующим выводом, мы видим, что если около крыла есть вихрь, направленный в ту же сторону, как циркуляция крыла, то общая подъемная сила, действующая на вихрь и на крыло, больше, чем для изолированного крыла; если же добавочный вихрь направлен против направления циркуляции, то подъемная сила системы меньше, чем для изолированного крыла.

§ 6. Для выяснения механического смысла выведенной выше формулы рассмотрим частный случай, когда поток обтекает цилиндр, имеющий циркуляцию, и вихри помещены вдали от цилиндра. В этом случае $\xi = z$, $\chi'(z) = 1$ и $a = 1$.

Тогда формула (I) примет вид:

$$Y + iX = -\rho V_{\infty} e^{-\theta i} \left[\Gamma - \sum J_k \right] - \rho i \Gamma \sum \frac{J_k}{2\pi b_k} + \rho i \sum J_k \sum \frac{J_p}{2\pi (b_k - a_e)}.$$

Но $\left| \frac{J_k}{2\pi b_k} \right| = V_{ko}$ — суть скорости, которые создаются в центре круга вих-

рем J_k ; называя $b_k = r_k e^{a_k i}$, имеем:

$$Y_{ko} + iX_{ko} = -\rho i \Gamma \frac{J_k}{2\pi r_k} e^{-a_k i},$$

или

$$P_k e^{(\frac{\pi}{2} - v_k) i} = \rho \Gamma V_{ko} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{2} + a_k\right) i},$$

откуда $P_k = \rho \Gamma V_{ko}$ и $v_k = a_k + \pi$; эти равенства выражают теорему Н. Е. Жуковского, примененную к вихрю Γ , помещенному на оси цилиндра, в предположении, что на него действует скорость, вызываемая присутствием вихря J_k (фиг. 15 и 16). Совершенно подобным же образом можно истолковать смысл

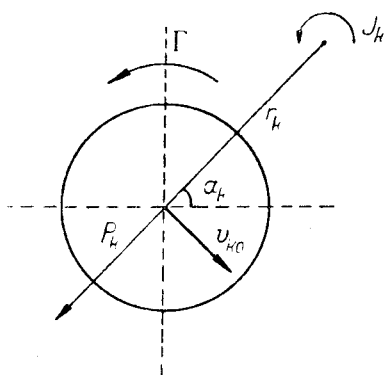
выражения $\rho i J_k \frac{J_e}{2\pi (b_e - a_k)}$.

Действительно $\left| \frac{J_e}{2\pi (b_e - a_k)} \right|$ есть величина скорости, которую создает вихрь J_k в точке, где помещается вихрь J_e . Пусть $b_e - a_k = r_{ke} e^{a_{ke} i}$; тогда называя все выражение через $Y_{ke} + iX_{ke}$, имеем:

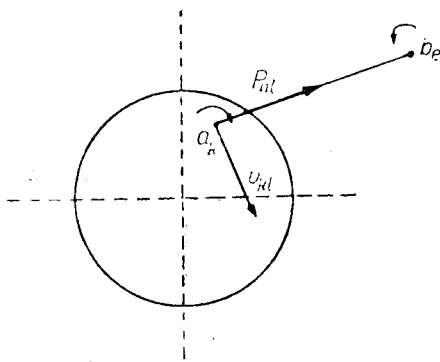
$$Y_{ke} + iX_{ke} = \rho i J_k \frac{J_e}{2\pi r_{ke}} = e^{-a_{ke} i}.$$

Тогда

$$P_{ke} e^{(\frac{\pi}{2} - v_{ke}) i} = \rho J_k \frac{J_e}{2\pi r_{ke}} e^{-(\frac{\pi}{2} - a_{ke}) i}$$



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Отсюда:

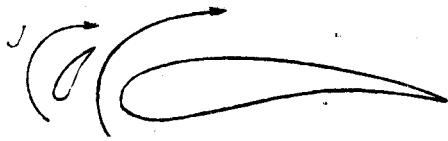
$$P_{ke} = \rho J_k \frac{J_e}{2\pi r_{ke}}; \quad v_{ke} = \alpha_{ke}.$$

Следовательно, рассматриваемое выражение дает теорему Н. Е. Жуковского в применении к вихрю, помещенному в точке a_k под действием скорости, вызываемую вихрем J_e .

Выражение $\rho V_\infty e^{-\theta_i} \Gamma$ представляет собой силу, вызываемую согласно теореме Н. Е. Жуковского у присоединенного вихря цилиндра потоком, обтекающим цилиндр, и аналогично выражение $\rho V_\infty e^{-\theta_i} J_k$ представляет собой соответствующие силы для вихрей J_k , являющихся изображениями вихрей J_k .

Отсюда получаем для настоящего случая теорему, которую можно рассматривать как обобщение теоремы Н. Е. Жуковского: если круглый цилиндр находится в жидкости, у которой в бесконечности помещается диполь, на конечном расстоянии конечное число неподвижных вихрей, то действие потока на цилиндр сводится к равнодействующей сил, вызываемых скоростью потока от диполя и от всех отдельных вихрей у присоединенного

вихря цилиндра и у вихрей, являющихся изображениями вихрей окружающего потока внутри цилиндра. Каждая из отдельных сил равна произведению плотности потока на интенсивность вихря и на ту скорость, которую поток имел бы в оси вихря от диполя или от отдельного вихря, окружающего поток;



Фиг. 17.

направлении скорости на оси вихря поворотом на прямой угол против направления циркуляции отдельного вихря. Иначе, равнодействующая складывается из сил следующих теореме Н. Е. Жуковского, вызываемых у присоединенного вихря и у изображений окружающих вихрей всеми скоростями от диполя и вихрей вне крыла.

В общем случае любого обтекаемого тела, повидимому, нельзя получить подобной простой формулировки вследствие искажений расстояний и направлений потока в силу конформного отображения, что и вызывает в формуле появление членов, зависящих от χ' и χ'' .

§ 7. Из предыдущего следует, что подъемная сила крыла без вихрей выражается формулой:

$$Y + iX = -\rho V_\infty e^{-\theta_i} \frac{1}{a} \Gamma,$$

в присутствии вихрей подъемная сила на всю систему, включая и вихри:

$$Y_1 + iX_1 = -\rho V_\infty e^{-\theta_i} \frac{1}{a} \left(\Gamma + \Delta\Gamma \right).$$

Следовательно, увеличение силы дается формулой:

$$\Delta Y_1 + i\Delta X_1 = -\rho V_\infty e^{-\theta_i} \frac{1}{a} \Delta\Gamma,$$

или

$$\Delta Y_1 + i\Delta X_1 = -\rho V_\infty e^{-\theta_i} \frac{1}{a} \sum \frac{J_k(1 - \rho_k^2)}{1 - 2\rho_k \cos \alpha_k + \rho_k^2}.$$

Рассмотрим простейший случай. Пусть около крыла имеется добавочное малое крылышко, поставленное таким образом, что оно работает на обтекание (это достигается выбором соответствующего угла атаки крылышка в потоке, который его обтекает) (фиг. 17).

Тогда, если размеры крылышка малы, сравнительно с его расстоянием от крыла, то приближенно его можно заменить одним вихрем интенсив-

ности, которая определяется по размеру крылышка, его углу атаки и скорости потока в точках, занимаемых крылышком.

Так как при рассматриваемом расположении J отрицательно, то

$$\Delta Y_1 + i \Delta X_1 = \rho V_\infty e^{-\theta i} \frac{1}{a} J \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2},$$

где ρ и α — координаты оси изображения вихря в конформном изображении внешней части крыла на внешнюю часть круглого цилиндра радиуса 1. Отсюда имеем:

$$\Delta P = \rho V_\infty \frac{1}{|a|} J \frac{1 - \rho^2}{1 - 2 \cos \alpha + \rho^2}.$$

Что касается направления этой силы, то она определяется по теореме Н. Е. Жуковского, так как формула остается та же.

Отсюда видим, что для увеличения подъемной силы всего выгоднее брать добавочное крылышко в точках, чтобы $\cos \alpha = -1$, т. е. у задней кромки крыла. Тогда:

$$\Delta P_1 = \rho V_\infty \frac{1}{|a|} \frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Итак, наиболее заметное увеличение подъемной силы получается для закрылка.

Если же поместить добавочное крылышко у передней кромки, то $\alpha = \pi$, и следовательно:

$$\Delta P_2 = \rho V_\infty \frac{1}{|a|} \frac{1 - \rho}{1 + \rho}.$$

Следовательно:

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right)^2.$$

Например, если $\frac{1}{\rho} = \frac{3}{2}$, то $\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = 25$.

Таким образом при одинаковых прочих условиях *увеличение подъемной силы от предкрылка менее заметно, чем от закрылка.*

Так как основная подъемная сила крыла равна $P = \rho V_\infty \frac{1}{|a|} \Gamma$, то отношение:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{J}{\Gamma} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}.$$

Таково же отношение $\frac{\Delta C_p}{C_p}$, если брать крылья с одинаковой полной поверхностью.

Так как для крыла циркуляция выражается приближенно формулой:

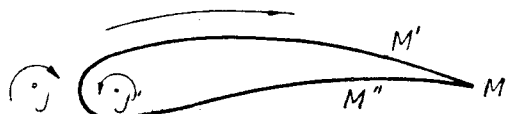
$$\Gamma = \pi V \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) l,$$

где β — угол атаки, V — скорость, l — хорда и 2α — центральный угол дужки крыла. Обозначая через β_1 угол атаки, L — хорду и $2\alpha_1$ — центральный угол дужки добавочного крылышка, имеем:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{V l \left(\frac{\alpha_1}{2} + \beta_1 \right)}{V_\infty L \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}.$$

Отсюда видим, что для увеличения подъемной силы надо: 1) ставить крылышко в точках, где скорость наибольшая (что имеет место около передней кромки); 2) дать возможно большую хорду l ; 3) брать наибольший возможный угол атаки β ; 4) $\alpha = 0$ (что противоречит п.1).

Нетрудно выяснить и механический смысл этого результата. В самом деле, в присутствии вихря I и его изображения I' , и при основной циркуляции Γ точка схода струй, благодаря вихрю I' при той же основной циркуляции смещается в некоторую новую точку M' (фиг. 18). Так как по основному принципу Н. Е. Жуковского точка схода должна быть M , то циркуляция Γ должна увеличиться настолько, чтобы точка схода сместилась



Фиг. 18.

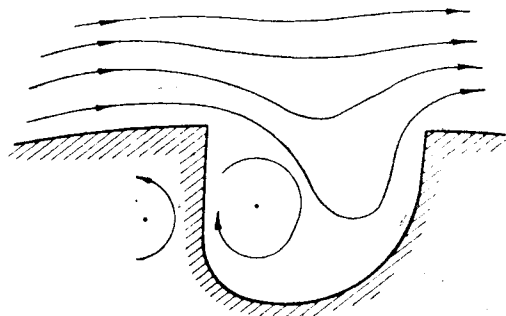
в M . Это и дает то увеличение циркуляции, которое подсчитано выше. Аналогичный эффект получится, если направление циркуляции I обратно направлению циркуляции Γ ; тогда точка схода сместится в M'' , а потому, чтобы удовлетворить требованию Н. Е. Жуковского, необ-

ходимо циркуляцию Γ уменьшить. Этот результат и был выше указан.

§ 8. В предыдущем параграфе мы учитывали влияние вихрей, принадлежащих к крылу (предкрылка или закрылка). Перейдем теперь к учету влияния вихрей, не связанных с крылом. Такие вихри могут образоваться в тех зонах около поверхности крыла, где создаются условия, вызывающие образование отрыва струй. Известно, что в вершинах выступающих углов скорость потока равна бесконечности: благодаря этому около таких вершин или образуются вихревые насадки, округляющие крыло, или происходит срыв струй.

Если крыло имеет острую переднюю кромку, то, как указал Н. Е. Жуковский¹, около передней кромки образуется вихревой насадок, вызывающий образование добавочного вихревого сопротивления. Аналогичный эффект получается при достаточном угле атаки и для округленного крыла; в настоящее время это явление можно считать в достаточной степени изученным².

Подобное же явление должно наблюдаться и в точках, где крыло имеет впадины. Пусть в поверхности крыла имеем углубление. Тогда может получиться отрыв струй, и в полости углубления мы получим слой неподвижной жидкости, который по некоторой поверхности S отделяется от текущей жидкости. Вследствие наличия трения образуется вихрь I в полости A , направленный, как указано на фиг. 19. Такие вихри, назовем их паразитическими вихрями, являются вихрями, не принадлежащими крылу, их действие мы теперь и изучим.



Фиг. 19.

Мы видели, что добавочная сила, получающаяся от присутствия одного паразитического вихря, выражается формулой:

¹ Н. Е. Жуковский, О поддерживающих планах типа Антуанет. Труды физ. отд. о-ва люб. естеств. т. XV, вып. 11, 1911. Также В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана в плоско-парал. потоке, стр. 136.

² См., например, Ф. Г. Шмидт, К теории сил лобового сопротивления плоского потока. Изв. Гос. гидрол. ин-та, № 18 1917, С. Н. Мичурин, К вихревой теории лобового сопротивления аэроплана. Уч. зап. Сарат. и-та С.-Х. 1929. См. также В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана конечного размаха, гл. V.

$$\Delta I + i\Delta X = \rho \left(\frac{d\omega}{dz} \right) \frac{I}{a\chi'(b)} + \rho \frac{iI^2}{2\pi} \frac{1}{(b-a)\chi'(b)} + \rho \frac{iI^2}{4\pi} \frac{x''(b)}{x'^2(b)}.$$

Так как

$$\left[\frac{d\omega}{dz} \frac{1}{x'(z)} \right]_{z=0} = V_b - \text{скорости потока в точке оси вихря, то}$$

$$\Delta Y + i\Delta X = \rho V_b I + \rho \frac{iI^2}{2\pi} \frac{1}{(b-a)\chi'(b)} + \rho \frac{iI^2}{4\pi} \frac{\chi''(b)}{\chi'^2(b)}.$$

Вихри могут образоваться только весьма близко к поверхности крыла, а потому $(b-a)$ очень мало. Поэтому приблизительно можно заменить всю вторую часть выражением $\frac{iI^2}{2\pi(b-a)\chi'(b)}$, так как остальные выражения можно считать малыми сравнительно с ним.

С другой стороны, приближенно:

$$(b-a)\chi'(b) = \chi(b) - \chi(a).$$

Следовательно:

$$\Delta Y + i\Delta X = \frac{iI^2}{2\pi[\chi(b) - \chi(a)]}.$$

Точки $\chi(b)$ и $\chi(a)$ суть оси вихрей паразитического и его изображения на плоскости крыла (фиг. 20.) Тогда:

$$\Delta Y + i\Delta X = i \frac{|I|}{2\pi[\chi(b) - \chi(a)]} \cdot |I|.$$

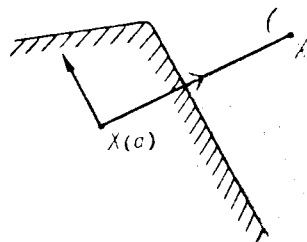
Пусть

$$\chi(b) - \chi(a) = \zeta e^{i\alpha};$$

тогда

$$\Delta Y + i\Delta X = \rho \frac{|I|}{2\pi r} e^{-(\alpha - \frac{\pi}{2})i} |I|,$$

где $\frac{|I|}{2\pi r} = v$ есть скорость, сообщаемая вихрю в точке $\chi(a)$ его изображением в точке $\chi(b)$. Пусть



Фиг. 20.

$$\Delta Y + i\Delta x = \Delta P (\sin \theta + i \cos \theta) = \Delta P e^{(\frac{\pi}{2} - \theta)i}.$$

Следовательно:

$$\Delta P e^{(\frac{\pi}{2} - \theta)i} = \rho V |I| \cdot e^{+(\frac{\pi}{2} - \alpha)i}.$$

Отсюда

$$\Delta P = \rho V |I| \text{ и } \theta = \alpha.$$

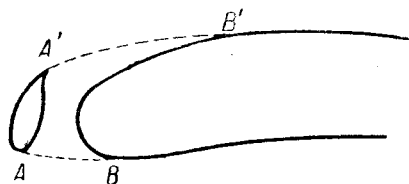
Эти уравнения показывают, что паразитический вихрь вызывает силу, направленную по прямой, соединяющей ось изображения паразитического вихря внутри крыла с осью паразитического вихря. Можно иначе сказать, что добавочная сила равна $\rho |I| v$ и ее направление получается из скорости поворотом ее на прямой угол против направления циркуляции вихря, т. е. получаем теорему Н. Е. Жуковского.

Легко видеть, что полученный результат приводит к следующему практически важному выводу. Всякие впадины на крыле, где могут образоваться паразитические вихри, вызывают увеличение лобового сопротивления.

Действительно, для образования паразитических вихрей необходимо, чтобы поток отрывался от передней стенки впадины; при этом образуются вихри, находящиеся в положении, указанном на фиг. 20, и образуется до-

бавочная сила, направленная назад, т. е. сила, увеличивающая лобовое сопротивление.

Применим это соображение к разрезному крылу. Если угол атаки таков, что на отрезках AB и $A'B'$ (фиг. 21) скорости потока равны, а потому равны и давления на жидкость, заключенную внутри щели, то продувания потока в щели нет и *крыло работает как крыло неразрезное*.



Фиг. 21.

Следовательно, мы можем применить к этому случаю предыдущие соображения. На краях щели образуются вихри (фиг. 22) I_1 и I_2 , на которые действуют скорости V_1 и V_2 , вызываемые их изображениями I_1' и I_2' . Следовательно, согласно предыдущему, развиваются силы P_1 и P_2 , вызывающие лобовое сопротивление. Так как интенсивность вихрей I_1 и I_2 незначительна, то и соответствующее увеличение лобового сопротивления невелико.

Отсюда же, между прочим, видно, что если мы имеем подвижной предкрылок, то *закрытие щели с одной стороны должно уменьшать силу лобового сопротивления*, так как при этом будут образовываться вихри только с одной стороны щели (фиг. 23).

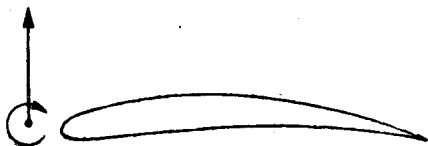
Как окончательный итог имеем, что лобовое сопротивление разрезного крыла, работающего как крыло сплошное, всегда больше сплошного крыла.

Замечание. Все предыдущее имеет место, если скоростью всего остального потока можно пренебречь сравнительно со скоростью вихря, изображающего данный, идущий внутри крыла. Положение совершенно меняется, если вихрь образуется в точках, где скорость окружающего потока очень велика; тогда, наоборот, можно пренебречь влиянием изображения вихря и взять только скорость обтекающего потока. В этом случае по предыдущему образуется сила P , так же направленная по направлению потока, т. е. сила лобового сопротивления. Сила P направлена в обратную сторону (фиг. 24) относительно силы потока, действующего на вихрь по теореме Н. Е. Жуковского; это является результатом того, что мы ищем силу, действующую не на вихрь, а на крыло.

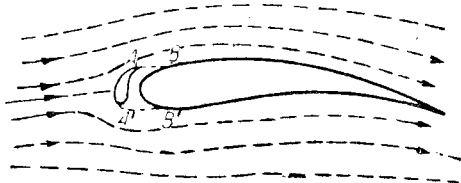
Экспериментальные данные в достаточной мере подтверждают это заключение, но показывают, что соответствующее увеличение лобового сопротивления весьма мало.



Фиг. 23.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

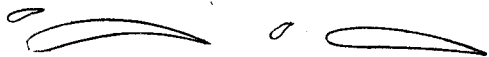
§ 9. В работе разрезного крыла (крыло с предкрылком) надо различать три различных режима.

1. При подходящем расположении крыла и предкрылка при малых углах атаки разрезное крыло может работать как крыло сплошное. При

этом предкрылок работает на срыв, но сорвавшиеся с него струи примыкают к основной части крыла и плавно обтекают ее (фиг. 25). Для возможности такого режима необходимо, чтобы скорость на AB и CD была одна и та же; тогда и давления будут равны и не будет протекания потока через щель. В этом случае разрезное крыло работает как неразрезное; некоторое отличие получается только в том, что благодаря вязкости воздуха в точках A и C образуются вихри, вызывающие увеличение лобового сопротивления. Так как интенсивность этих вихрей невелика, то и соответствующее увеличение лобового сопротивления незначительно. На диаграмме Лилиенталья в соответствующей части ее получим небольшое смещение поляры сплошного крыла параллельно оси лобового сопротивления.

Этот режим возможен, повидимому, только при достаточной узости щели, так как иначе едва ли возможно постоянство давлений на AB и CD . Во всяком случае, этот режим невозможен в том случае, если предкрылок помещен высоко над основным крылом,

подобно расположению крыльев в биплане, или в том случае когда помещен впереди крыла, и угол атаки предкрылка мало отличается от угла атаки основного крыла, т. е. когда имеем расположение, близкое к тандему; оба эти случая указаны на фиг. 26.



Фиг. 26.

2. При увеличении угла атаки возможен такой режим, когда предкрылок работает на срыв, основное крыло на обтекание и поток протекает через щель (фиг. 27). Этот режим характеризуется резким увеличением лобового сопротивления сравнительно со сплошным крылом и уменьшением подъемной силы так же сравнительно со сплошным крылом.

Причиной увеличения лобового сопротивления является образование вихревого хвоста (вихревой дороги Кармана) за предкрылком, что должно резко увеличить лобовое сопротивление.

Уменьшение подъемной силы вызывается уменьшением хорды части крыла, работающей на обтекание (вместо l для сплошного крыла получается l_1) (фиг. 27).

На диаграмме Лилиенталья соответствующий режим скажется в резком сдвигении соответствующей части поляры по оси лобового сопротивления

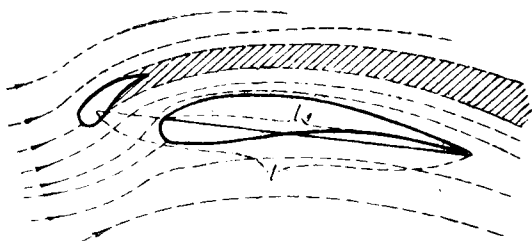
и в уменьшении значений C_p (коэффициента подъемной силы) сравнительно с монопланом. Начало этого режима на поляре характеризуется, таким образом, более или менее резкой ступенькой в поляре.

3. При дальнейшем увеличении угла атаки вихревой хвост за предкрылком становится уже, что вызывает уменьшение лобового

сопротивления, следовательно, поляра разрезного крыла должна постепенно приближаться к поляре крыла сплошного. Наконец, при значительном увеличении угла атаки предкрылок начинает работать без срыва на обтекание. В этом случае предкрылок начинает работать как вихрь, что вызывает, как было показано, увеличение подъемной силы основной части крыла.

Соответствующий режим скажется на поляре в увеличении значений и приближении поляры к поляре сплошного крыла. Собирая все эти результаты и изображая их на диаграмме Лилиенталья, получим следующее.

Пусть MN — поляра сплошного крыла при условии, что оно при всех углах работает без срыва струй (фиг. 28). Тогда часть поляры I соответствует первому из указанных выше режимов; часть II — второму, характеризующемуся увеличением лобового сопротивления и уменьшением подъемной силы,



Фиг. 27.

часть III характеризует третий режим, причем нет резкого перехода из режима II в III.

Так как при больших углах атаки сплошное крыло, как показывают экспериментальные данные, начинает работать на срыв при меньших углах атаки, то в действительности работа сплошного крыла характеризуется не поларой MN , а поларой MN_1 .

Как выше было указано, надлежащим размещением крыла и предкрылка можно достигнуть того, что часть II полары отсутствует.

Работа разрезного крыла представляет интерес, главным образом, при больших углах атаки. Отсюда следует, что при больших углах атаки предкрылок работает как вихрь, помещенный вблизи крыла. Такой эффект действия предкрылка мы в дальнейшем и изучим.

При малых углах атаки (часть II на поларе Лилиенталя) предкрылок ухудшает крыло. Чтобы избежать этого ухудшения, возможны два пути.

Во-первых, можно крыло сделать раздвижным, причем при малых углах атаки (части I и II полары) предкрылок плотно прижимается к крылу, и крыло с предкрылком работает как одно сплошное крыло. При значительных углах

атаки (примерно с точки T полары) предкрылок при помощи соответствующего механизма отодвигается, и крыло далее работает как разрезное. В этом случае полара будет иметь вид приблизительно кривой MTN . Этот путь обычно и применяется в конструктивном осуществлении разрезного крыла, например, в крыльях Хэндли-Педж.

Можно, во-вторых, попытаться соответствующим расположением крыла и предкрылка отодвинуть часть II на такие углы атаки, чтобы до минимума сократить интервал углов атаки, при которых крыло работает при режиме II. Возможно,

что этим путем можно добиться некоторых положительных результатов. В этом случае не понадобятся более или менее сложные механизмы для раздвигания крыльев.

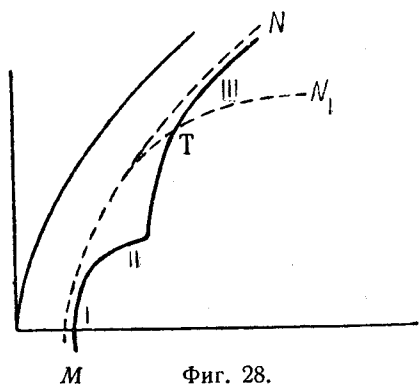
Подведем итоги полученным в этой главе результатам.

1. В работе предкрылка надо различать три различных режима; при больших углах атаки предкрылок работает на обтекание и приближенно может быть заменен одним вихрем, связанным с крылом, помещенным у передней кромки основной части крыла.

2. Вихрь, заменяющий предкрылок, не вызывает значительного увеличения подъемной силы; следовательно, эффект, вызываемый работой предкрылка, надо искать не в непосредственном увеличении подъемной силы, а в изменении характера обтекающего потока, благодаря чему крыло работает на обтекание при углах атаки, значительно превосходящих соответствующие углы крыла без предкрылка.

3. При малых углах атак предкрылок работает на срыв; вихри, образующиеся за предкрылком, вызывают увеличение лобового сопротивления.

Отсюда следует, что для построения теории работы предкрылка нужно выяснить, при каких условиях начинается отрыв струй от поверхности крыла и как влияет присутствие предкрылка на условия отрыва струй. Эти две задачи и решаются приближенно в двух следующих главах.



Фиг. 28.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Определение точки отрыва струй от поверхности крыла

§ 1. Теория пограничного слоя. Уравнения Прандтля, Кармана, Польгаузена. § 2. Распределение скоростей на поверхности крыла. § 3. Распределение давлений на поверхности крыла. § 4. Случай плоской пластинки. § 5. Экспериментальные данные. § 6. Интегрирование уравнения Польгаузена для случая крыла. § 7. Предельные углы атаки. § 8. Перемещение точки отрыва на поверхности крыла. § 9. Обобщение предшествующих результатов.

§ 1. В настоящем параграфе мы приведем исходные соображения теории пограничного слоя, которые послужат нам для определения точки отрыва струй.

Известно¹, что в пределах толщины слоя вместо основных уравнений гидродинамики имеют место уравнения:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad \text{уравнения Прандтля (1)}$$

где течение принимается плоскопараллельным, кривизною стенки пренебрегаем и считаем ее плоской, причем u компонента скорости, параллельная стенке, и v — ей перпендикулярная.

Первое из уравнений (1) после интегрирований и некоторых преобразований дает следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u dy = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \text{уравнение Кармана (2)}$$

где h — толщина слоя, U — скорость на границе слоя.

Сравнительно с системой уравнений Прандтля интегральное уравнение Кармана имеет следующие два преимущества.

1. Уравнение Кармана содержит одну неизвестную функцию u , кроме того h зависит от положения точки на поверхности стенки (от x);

2. Порядок дифференциального соотношения (2) понижен путем интегрирования сравнительно с уравнением (1).

Если известно $U(x)$, т. е. распределение скоростей на наружной поверхности слоя, то известно и $\frac{\partial p}{\partial x}$, так как из уравнения Бернулли следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U U'. \quad (3)$$

Для приближенного решения уравнения Кармана сравнительно простой метод дан Польгаузенем²; этот метод состоит в следующем.

¹ См. например В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана конечного размаха, гл. II, Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.

² К Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Abh. a. d. Aerodyn. Inst. an der Technischen Hochschule zu Aachen, H. 1. S. 20.

Представляем искомую функцию в виде:

$$u = ay + by^2 + cy^3 + dy^4,$$

и для определения a, b, c, d , неизвестных функций переменного x , применяем следующие граничные условия:

1. На внутренней границе слоя при $y=0$ по свойству слоя Прандтля имеем:

$$u = 0; v = 0. \quad (4)$$

Отсюда по первому из уравнений (1) имеем: $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$,

т. е. по (3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{UU'}{v}. \quad (5)$$

2. При $y=h$ на внешней границе слоя:

$$u = U, \quad (6)$$

Далее, так как на внешней границе слоя не проявляется сила вязкости, то

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Кроме того, так как скорость U асимптотически приближается к U , то Польгаузен увеличивает порядок соприкосновения, полагая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Уравнения (5), (6), (7) и (8) позволяют определить коэффициенты a, b, c, d . Получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{U}{6h}(12 + \lambda); \quad b = -\frac{UU'}{2v} = -\frac{U\lambda}{2h^2}, \\ c &= -\frac{U}{2h^3}(4 - \lambda); \quad d = \frac{U}{6h^4}(6 - \lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\lambda = \frac{U'h^2}{v}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2) и заменяя $z = \frac{h^2}{v}$ так, что $\lambda = U'z$, получим для определения z уравнение¹:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U'^2} \right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU'''}{U'^3} \right) \lambda^3 \right]}{U[-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2]}. \quad (10)$$

Это уравнение мы приложим к определению точки отрыва струй. Чтобы получить точку отрыва, надо найти такое x , чтобы $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$, т. е. для этого должно быть $a=0$, откуда $\lambda = -12$. (11)

С другой стороны, так как $\lambda = U'z$, то $\lambda=0$ в той точке, где U достигает максимума; помещая в этой точке начало координат, получим $U=0$ при $y=0, x=0$.

Приведем уравнение (10) к другому виду, сделав замену $z = \frac{\lambda}{U'}$, откуда:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\lambda}{\partial x} \frac{1}{U'} - \lambda \frac{U''}{U'^2}.$$

¹ В. В. Голубев, Теория крыла конечного размаха. Труды ЦАГИ, вып. 108. 1931. Стр. 108.

Получаем:

$$\frac{d\lambda}{dx} \frac{U}{U'} - \lambda \frac{UU''}{U'^2} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U'^2} \right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU''}{U'^2} \right) \lambda^3 \right]}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}. \quad (12)$$

Отсюда надо найти интеграл λ такой, что $\lambda = 0$ при $x = 0$; пусть этот интеграл есть $\lambda = F(x)$. Тогда, решая уравнения:

$$F(x) = -12, \quad (13)$$

найдем точку отрыва.

Из предшествующего видно, что для определения точки отрыва надо знать функцию $U(x)$, т. е. надо знать скорость на внешней границе слоя при наличии отрыва; определение этой скорости в свою очередь требует знания положения точки отрыва. Следовательно, теория Прандтля в ее современном положении не дает возможности определить точку отрыва без некоторых дополнительных данных, например, данных о распределении скоростей или давлений на поверхности крыла.

Рассмотрим теперь два случая распределения скоростей и давлений на верхней поверхности крыла: 1) случай, когда положение точки отрыва известно, 2) случай, когда положение точки отрыва неизвестно.

§ 2. В случае, если крыло работает в условиях полного обтекания, точкой отрыва струй является задняя кромка крыла; в дальнейшем мы будем предполагать, что крыло имеет форму инверсии параболы, следовательно, задняя кромка его острая, что вполне определяет место отрыва струй.

Чтобы получить крыло формы инверсии параболы, поступим следующим образом.

Отобразим окружность C при помощи подстановки:

$$\zeta = z + \frac{k^2}{z}.$$

Называя угол $OA'O'$ через $\frac{\alpha}{2}$ (фиг. 29), получим:

$$\zeta = z + \frac{R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{z}. \quad (1)$$

Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$; тогда из треугольника OBO' имеем:

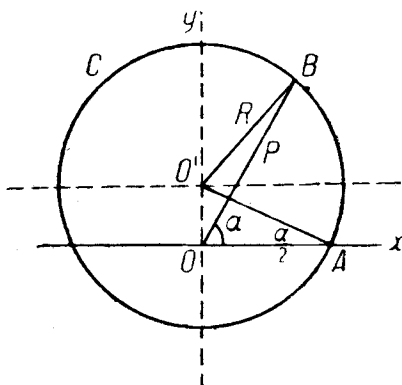
$$R^2 = \rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2R \sin \frac{\alpha}{2} \rho \sin \varphi.$$

Отсюда

$$\rho = R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \pm \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Пусть

$$\rho_1 = R \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi + \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (2)$$



Фиг. 29.

Из равенства:

$$\rho_1 \rho_2 = -R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

имеем:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\rho_2}{R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{R^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\rho_1} = -\rho_2 = R \left(\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \right). \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1) и полагая

$$\xi = \xi + i\eta,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \xi + i\eta = R & \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi + \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \\ & + R \left(\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \right) (\cos \varphi - i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

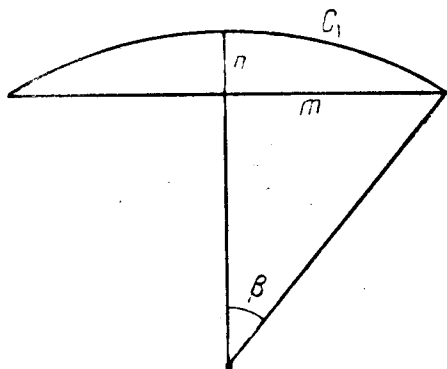
$$\xi = 2R \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \varphi, \quad (4)$$

$$\eta = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi.$$

Из последнего уравнения видим, что $\eta \geq 0$ при всяком φ .

Из уравнений (4) имеем далее:

$$\xi^2 + \eta^2 = 4R^2 \left\{ \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi \right\},$$



Фиг. 30.

$$\xi^2 + \eta^2 = 4R^2 \left\{ \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin^2 \varphi \right\},$$

и, подставляя $\sin^2 \varphi = \frac{\eta}{2R \sin \frac{\alpha}{2}}$ из (4),

получим:

$$\xi^2 + \eta^2 + 2 \frac{R \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \eta = 4R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

иначе:

$$\xi^2 + \left(\eta + \frac{R \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Итак, при конформном отображении при помощи уравнения (1) внешняя часть окружности C переходит в часть окружности (5), лежащую выше оси ξ . Найдем ее положение, радиус и центральный угол. Для этого найдем отрезки m и n (фиг. 30).

Из (5) имеем:

$$m = 2R \cos \frac{\alpha}{2}, \quad n = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Так как из (5) видим, что радиус окружности $R_1 = \frac{R}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, то отсюда имеем:

$$\sin \beta = \frac{m}{R_1} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha.$$

Следовательно, $\beta = \alpha$.

Окончательно имеем результат: преобразование (1) преобразует конформно внешнюю часть окружности C на внешнюю часть дуги C_1 , радиуса $\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

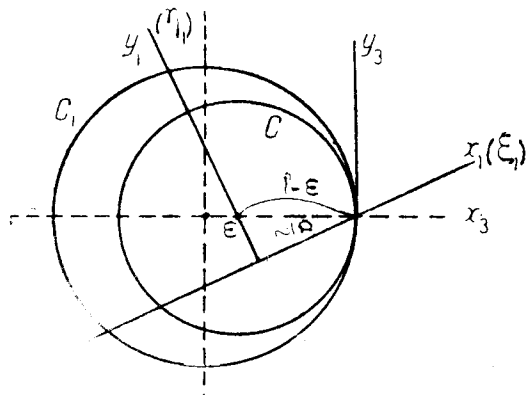
с центральным углом 2α .

Отсюда легко получить и формулу для отображения инверсии параболы.

Преобразуем при помощи формулы (1) окружность C радиуса $1-\epsilon$ (фиг. 31) и возьмем поток, обтекающий цилиндр C_1 , радиуса 1; тогда, очевидно, получим на преобразованной плоскости поток, обтекающий инверсию параболы со скелетом, изображением окружности C .

На плоскости (x_1, y_1) и (ξ_1, η_1) (фиг. 31) изображение, как показано, дается формулой:

$$\xi = z_1 + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (1-\epsilon)^2}{z_1}. \quad (6)$$



Фиг. 31.

Перенос на плоскости z начало в $\left(z_1 = (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ и на плоскости ξ в точку $\xi_1 = 2(1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}$, что соответствует задней кромке крыла, получим формулы перехода:

$$\xi_1 = \xi_2 + 2(1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}; \quad z_1 = z_2 + (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда, вставляя эти выражения в (6), получим:

$$\xi_2 = z_2 - (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (1-\epsilon)^2}{z_2 + (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (7)$$

Повернем около точки A на плоскости z_2 оси на угол $+\frac{\alpha}{2}$; тогда $z_2 = z_3 e^{-\frac{\alpha}{2}i}$. Из (7) получим:

$$\xi_2 = z_3 e^{-\frac{\alpha}{2}i} - (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (1-\epsilon)^2}{z_3 e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

Наконец, перенесем на плоскости z_3 начало в центр окружности C_1 ; тогда $z_3 = z_2 - 1$ и из (8) получим:

$$\xi = e^{-\frac{\alpha}{2}i} (z - 1) - (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (1-\epsilon)^2}{(z - 1) e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\epsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (9)$$

Это и есть искомое преобразование, переводящее внешнюю часть окружности C_1 во внешнюю часть инверсии параболы, построенной на дуге радиуса $\frac{1-\varepsilon}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Заметим еще, что отношение радиуса меньшей окружности к большей в формуле (9) равно $1-\varepsilon$; часто берут обратно отношение радиуса большей окружности к меньшей в виде $1+\varepsilon_1$. Легко ε выразить через ε_1 . Называя соответственно через r и R радиусы малой и большой окружности, имеем:

$$\frac{r}{R} = 1 - \varepsilon; \quad \frac{R}{r} = 1 + \varepsilon_1,$$

откуда

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon_1)=1 \text{ и } \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 + \dots$$

При малых порядка 0,1 ε и ε_1 , можно приближенно считать $\varepsilon = \varepsilon_1$; но при больших ε разница уже весьма чувствительна; так, $\varepsilon_1 = 0,25$ при $\varepsilon = 0,2$; $\varepsilon_1 = 0,43$ при $\varepsilon = 0,3$ и т. д.

Из уравнения (9) имеем:

$$\frac{d\xi}{dz} = e^{-\frac{\alpha}{2}i} \left[1 - \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}} \right],$$

или

$$\frac{d\xi}{dz} = e^{-\frac{\alpha}{2}i} \frac{(z-1) \left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]}{\left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2}.$$

Характеристическая функция обтекания круглого цилиндра при наличии циркуляции имеет вид:

$$w = V_{\infty} e^{-\theta i} \left(z + \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

откуда:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-\theta i} \left(z - \frac{e^{2\theta i}}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z}. \quad (10)$$

Если расположить оси таким образом, чтобы точка отрыва соответствовала значению $z=1$, то в этой точке согласно исходному положению Н. Е. Жуковского $\frac{dw}{dz} = 0$.

Итак

$$V_{\infty} e^{-\theta i} \left(1 - e^{2\theta i} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} = 0. \quad (11)$$

Исключая Γ из (10) и (11), получим уравнение:

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} e^{-\theta i} \frac{z-1}{z} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right). \quad (12)$$

Из (12) имеем:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \\ = V_{\infty} e^{-\theta i} \frac{z-1}{z} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z}\right) e^{+\frac{\alpha}{2} i} \frac{\left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}\right]^2}{(z-1) \left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}\right]}.$$

Так как $\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|$ равно скорости потока в данной точке ζ , то

$$V_{\zeta} = V_{\infty} \left| e^{-\theta i} + \frac{e^{-\theta i}}{z} \right| \frac{\left| (z-1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| (z-1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|}. \quad (13)$$

Точке на поверхности крыла соответствует точка на поверхности цилиндра; пусть $z = e^{i\lambda}$, тогда:

$$V_{\zeta} = V_{\infty} \left| e^{-\theta i} + e^{(\theta-\lambda)i} \right| \frac{\left| (e^{i\lambda} - 1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| (e^{i\lambda} - 1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|}. \quad (14)$$

Но

$$\left| e^{-\theta i} + e^{(\theta-\lambda)i} \right| = \left| e^{-\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)i} + e^{\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)i} \right| = 2 \cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right); \quad (15)$$

$$\left| (e^{i\lambda} - 1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \left| e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)i} 2i \sin \frac{\lambda}{2} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \\ = \left[(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 + 4 \cos^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \frac{\lambda}{2}; \quad (16)$$

$$\left| (e^{i\lambda} - 1)e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \left| e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)i} 2i \sin \frac{\lambda}{2} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \\ = 4 \left\{ (1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right\}. \quad (17)$$

Подставляя эти значения в (5), имеем:

$$V_{\zeta} = V_{\infty} \cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \frac{\lambda}{2}}}. \quad (18)$$

Эта формула и дает возможность подсчитывать величину скорости в любой точке поверхности крыла типа инверсии пораболы при условии точного обтекания крыла, т. е. когда точкой отрыва является задняя кромка крыла.

§ 3. Зная распределение скоростей, легко рассчитать и распределение давлений в различных точках крыла. Применяя формулу Бернулли-Лапласа, получим:

$$p_{\zeta} = C - \frac{\rho}{2} V_{\zeta}^2 = \\ = C - \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\left[(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right]^2}{\left((1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right)^2}$$

Полученную точную формулу заменим приближенную при следующих предположениях: 1) ϵ мало (порядка до 0,3), 2) θ мало (до 15°), 3) α мало (порядка 20°). Тогда, так как:

$$\cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\lambda}{2} + \sin\theta \sin\frac{\lambda}{2};$$

считая θ и λ малым, имеем:

$$\cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\lambda}{2}$$

и приближенно можно положить:

$$\epsilon^2 = 0; \cos\theta = 1; \sin\theta = 0; \cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) = \cos\frac{\lambda}{2}; \sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\lambda}{2},$$

получим

$$p_\tau = C - \frac{\rho}{2} V^2 \cos^2\frac{\lambda}{2} \cos^2\theta \frac{\left[1 - 2\epsilon - 4(1 - \epsilon) \sin^2\frac{\lambda}{2} + 4 \sin^2\frac{\lambda}{2}\right]^2}{1 - 2\epsilon - 2(1 - \epsilon) \sin^2\frac{\lambda}{2} + \sin^2\frac{\lambda}{2}}$$

или

$$p_\tau = C - \frac{\rho}{2} V^2 \cos^2\frac{\lambda}{2} \cos^2\theta \frac{\left[1 - 2\epsilon + 4\epsilon \sin^2\frac{\lambda}{2}\right]^2}{(1 - 2\epsilon) \left(1 - \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)},$$

т. е.

$$p_\tau = C - \frac{\rho}{2} V^2 \left\{1 - 4\epsilon + 8\epsilon \sin^2\frac{\lambda}{2}\right\} \cos^2\theta,$$

или

$$p_\tau = C - \frac{\rho}{2} V^2 \left\{1 - 4\epsilon \cos\lambda\right\} \cos^2\theta.$$

Но на крыле $2 \cos\lambda$ приближенно равно расстоянию от середины крыла s , так что

$$p_\tau = C - \frac{\rho}{2} V^2 \left\{1 - 2\epsilon s\right\} \cos^2\theta = \left(C - \frac{\rho}{2} V^2\right) + \rho V^2 \epsilon \cos^2\theta \cdot s.$$

Для задней кромки $s=1$ и

$$p_o = C - \frac{\rho}{2} V^2 \left\{1 - 2\epsilon\right\} \cos^2\theta.$$

Следовательно,

$$\Delta p = p_o - p_\tau = \frac{\rho}{2} V^2 \cos^2\theta \left\{2\epsilon - 2\epsilon s\right\} = \rho V^2 \epsilon \cos^2\theta (1 - s).$$

Отсюда мы видим, что давление линейно возрастает вдоль верхней поверхности.

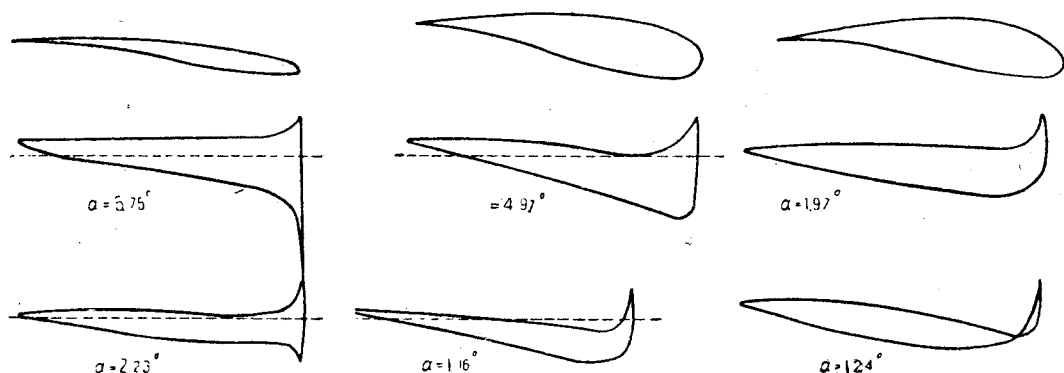
Данное выше доказательство применимо только при небольшом θ и при небольшом $\frac{\lambda}{2}$; таким образом, линейность распределения давления исчезает вблизи передней кромки (где $\lambda=180^\circ$).

Дадим график распределения давлений (фиг. 32), полученных теоретическим путем¹.

¹ W. G. A Perring, The theoretical pressure Distribution around Joukowski aerofoil. Technical Report of the aerodynamical Reserches, 1927.

На приведенных изображениях (фиг. 32) видно, что линейность изменения давления в достаточной мере выполняется в весьма широких размерах: можно считать, что *давление меняется линейно для толстых крыльев на всем промежутке от точки, где давление наименьшее (т. е. где v_x принимает максимальное значение) и до точки схода струй (т. е. до задней кромки).*

Для тонких крыльев (при малых ϵ) это не выполняется; причиной этого является очень большое значение скорости около передней



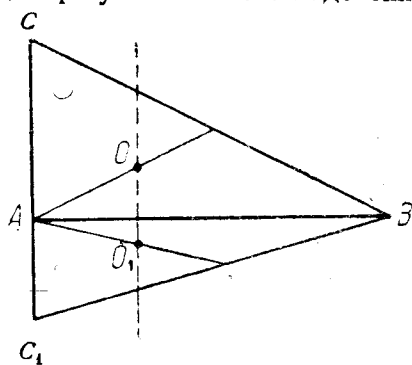
Фиг. 32.

кромки и соответственно этому чрезвычайно резкое уменьшение силы давления. Но из общей теории крыла известно, что образование очень больших скоростей около передней кромки невозможно с точки зрения теоремы С. А. Чаплыгина.¹ Благодаря этому около передней кромки образуются вихревые воздушные насадки, которые действуют на крыло так, как если бы увеличилось соответствующее значение ϵ ; в результате этого надо ожидать и для тонких крыльев распределения давления, ближе подходящего к линейному на всем интервале от наименьшего значения давления до точки схода.

Отсюда получаем любопытный результат, который экспериментально хорошо известен. Точка, где скорость наибольшая, находится около передней кромки. Таким образом можно считать, что давление распределено линейно и на верхней и на нижней поверхностях крыла. Отсюда легко показать, что центр приложения силы давления находится на $1/3$ хорды, считая от передней кромки,—результат, часто применяемый в приложениях.

Действительно, если принять, что увеличение давления на нижнюю поверхность крыла и уменьшение давления на верхнюю поверхность крыла следуют линейному закону на всей поверхности крыла, то центр давления будет находиться на линии, соединяющей точку O , центр тяжести треугольника ABC (подсасывающая сила на верхнюю поверхность), и точку O_1 , центр тяжести треугольника ABC_1 (избыток давления на нижнюю поверхность крыла), т. е. направление силы отсекает от хорды крыла AB третью часть от передней кромки (фиг. 33).

Из предшествующего видно, что это предположение только приближенное. В действительности точка приложения определяется построением параболы метacentров.



Фиг. 33.

¹ См., например В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. Труды ЦАГИ, вып. 29. Москва, 1927. Стр. 32.

§ 4. Рассмотрим одно совершенно элементарное приложение полученных формул к теории крыла.

В случае плоской пластинки формулы для скорости потока, обтекающего ее, получим из формулы § 2, положив в ней $\alpha = 0$; $\varepsilon = 0$. Отсюда

$$V = V_{\infty} \cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}}. \quad (1)$$

Для величины давления потока в некоторой точке пластинки получим выражение:

$$p_{\zeta} = C - \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \cos^2\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}. \quad (2)$$

Возьмем две точки пластинки: одну ζ_1 на верхней поверхности пластинки (т. е. $\lambda > 0$) и находящуюся под ней точку ζ_2 нижней поверхности пластинки ($\lambda < 0$). По (2) соответствующие давления выразятся так:

$$p_{\zeta_1} = C - \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \cos^2\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}},$$

$$p_{\zeta_2} = C - \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \cos^2\left(\theta + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}.$$

Отсюда давление на крыло всего потока равно:

$$p_{\zeta_1} - p_{\zeta_2} = \Delta p = \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \left\{ \cos^2\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) - \cos^2\left(\theta + \frac{\lambda}{2}\right) \right\},$$

или

$$\Delta p = 2\rho V_{\infty}^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} \cos \theta \cos \frac{\lambda}{2} \cdot \sin \theta \sin \frac{\lambda}{2} = 2\rho V_{\infty}^2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2}.$$

Чтобы получить все давление потока на пластинку, надо взять сумму давлений на все элементы пластинки.

Так как из

$$\zeta = (z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} - (1-\varepsilon)\cos \frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos \frac{\alpha}{2}}$$

в рассматриваемом случае имеем:

$$\zeta = (z-1) - 1 + \frac{1}{z-1+1} = z + \frac{1}{z} - 2,$$

откуда

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2}$$

и на поверхности пластинки, где $z = e^{i\lambda}$:

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| 1 - e^{-2i\lambda} \right| = \left| e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} \right| = 2 \sin \lambda.$$

Называя через s расстояние точки пластинки от задней кромки, имеем по свойству модуля

$$\left| \frac{dz}{ds} \right| = \frac{ds}{d\lambda},$$

а потому:

$$ds = 2 \sin \frac{\lambda}{2} d\lambda.$$

Следовательно, сила давления потока на крыло равна:

$$\begin{aligned} P &= \int \Delta p ds = 4 \rho V_{\infty}^2 \sin \theta \cos \theta \int_0^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\lambda}{2} \sin \lambda d\lambda = \\ &= 4 \rho V_{\infty}^2 \sin \theta \cos \theta \int_0^{\pi} 2 \cos^2 \frac{\lambda}{2} d\lambda = 4 \pi \rho V_{\infty}^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

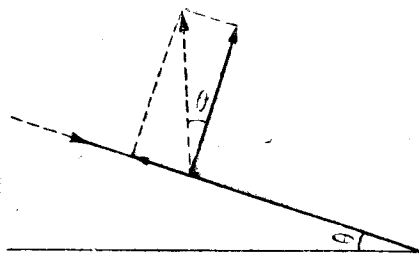
Между тем известно, что если рассчитать величину силы давления потока на крыло по теореме Н. Е. Жуковского или по формуле Чаплыгина-Блязиуса, то получим:

$$P_1 = 4 \pi \rho V_{\infty}^2 \sin \theta^1.$$

Кроме того P направлено перпендикулярно к пластинке, P_1 перпендикулярно к потоку (фиг. 34).

Отсюда видно, что P_1 представляет собой равнодействующую силу P и перпендикулярной к ней и, следовательно, направленной по направлению пластинки силы Q , причем

$$Q = P_1 \sin \theta = 4 \pi \rho V_{\infty}^2 \sin \theta.$$



Фиг. 34.

Отсюда мы видим, что в случае пластинки теорема Чаплыгина-Блязиуса или теорема Жуковского дает неверное выражение силы давления потока на пластинку. Это обстоятельство было впервые отмечено Кутта, который дал и объяснение его²; более подробное изучение этого явления принадлежит Н. Е. Жуковскому³.

Причиной этого служит то, что у передней кромки образуется вихрь, и теорема Чаплыгина-Блязиуса дает силу давления потока не только на крыло, но и на вихрь, так как входящий в теорему Чаплыгина интеграл берется по кругу столь большого радиуса, что он охватывает и крыло и образующийся у передней кромки вихрь. Применяя к вихрю теорему Н. Е. Жуковского, получим силу давления потока на вихрь; она по величине равна силе Q , но направлена в противоположную сторону.

Вычитая из P_1 эту силу, получим действительную силу давления потока на пластинку P , которую мы и нашли иным путем выше.

Такое явление будет наблюдаться во всех случаях, когда передняя кромка крыла острая, или вообще, когда у передней кромки скорость потока превосходит скорость звука⁴.

В главе I мы рассматривали аналогичные явления, вызываемые образованием вихрей как у выходящих углов крыла, так и во входящих углах⁵.

¹ См., например, В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке, стр. 80. При этом нужно помнить, что хорда пластинки в рассматриваемом случае равна 4 как видно, например, из выражения (4).

² См. там же, стр. 137.

³ См. там же, стр. 143.

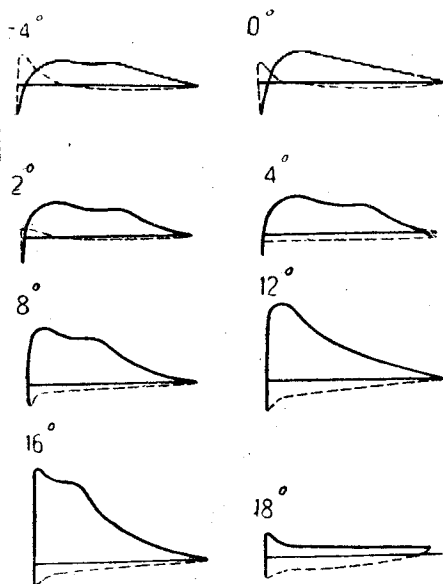
⁴ См., например, В. В. Голубев, Теория крыла конечного размаха, стр. 221.

⁵ Там же, стр. 12.

Примененный выше метод расчета давления потока на крыло можно применять в случае любого крыла, но, как легко видеть, в более сложных случаях вычисления становятся чрезвычайно сложными. Теорема Чаплыгина-Блязюса дает возможность решить эту задачу гораздо более простым способом.

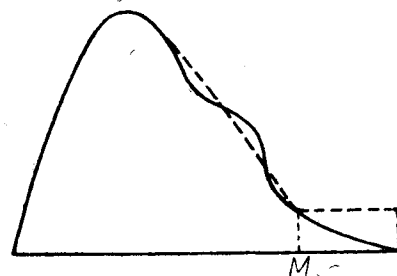
§ 5. Полученные выше теоретические результаты, дающие распределение давлений на крыле, в достаточной мере подтверждаются экспериментальными данными. При этом обнаруживается весьма интересный факт: приблизительно линейность выполняется и тогда, когда точка отрыва отходит от задней кромки. В этом случае приблизительно линейное распределение давления выполняется в промежутке от точки, где давление минимальное, до точки, где наступает срыв.

Как пример, рассмотрим следующие данные о распределении давления на середину крыла (Геттинген, № 387) при углах атаки от -4 до 18°



Фиг. 35.

по данным лаборатории в Торонто¹ (фиг. 35). Во всех этих графиках распределение давления между минимальным значением (т. е. где подсасывающая сила достигает своего максимума) и точкою срыва следует приблизительно линейному закону. Только при 16° распределение давления сильно отклоняется от линейного; весьма вероятно, что в этом случае точкой отрыва является не зад-



Фиг. 36.

няя кромка, а точка M (фиг. 36) и в действительности распределение давлений приблизительно следует закону, указанному на чертеже пунктиром. Наконец, при 18° почти все крыло работает на срыв, в результате чего давление во всех точках верхней поверхности крыла постоянно.

Прекрасное согласие с распределением давлений, следующих линейному закону, дают следующие данные примеров давлений на основную часть разрезного крыла по опытам, проведенным в ЭАО ЦАГИ (фиг. 37). В них линейность распределения выполняется с чрезвычайно большой точностью².

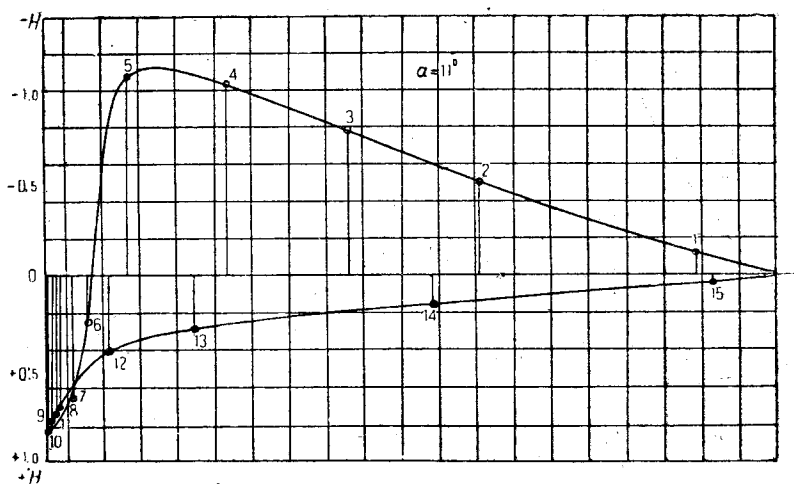
Совершенно аналогичные результаты дают следующие измерения в Геттингенской лаборатории Прандтля (фиг. 38, 39 и 40)³.

На фигурах 39 и 40 при углах $11,5$ и $14,5$ видно, что часть крыла (отрезки OA на фиг. 39, OA и OB на фиг. 40) работает на срыв. Интересно отметить, что для наиболее толстого крыла отрыв струй начинается раньше, чем для более тонкого. Причину этого мы увидим ниже в § 7.

¹ University of Toronto, Faculty of applied science and engineering school of engineering research. Bulletin № 10. Aeronautical Papers of Parnin. 1927.

² Приводимые экспериментальные данные сообщены мне инж. Красильщиковым, за что приношу ему искреннюю благодарность.

³ «Ergebnisse d. Aer. Versuchanst zu Göttingen», II, S. 45 — 46.



Фиг. 37.

§ 6. Результаты, разобранные в двух предыдущих параграфах, позволяют высказать следующее положение: *давление на верхней поверхности крыла изменяется по линейному закону в интервале от точки, где давление наименьшее, до точки срыва.*

В случае схода струй с задней кромки крыла этот результат приближенно выражает зависимость, получаемую теоретическим путем; в случае отрыва струй ранее задней кромки этот результат приходится рассматривать как факт, даваемый экспериментом.

Пользуясь этим результатом, можно легко разрешить задачу о нахождении точки отрыва струй от верхней поверхности крыла, поставленную в § 1 настоящей главы.

Возьмем уравнение (10) § 1:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U_{12}^2} \right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU''}{U_{12}^2} \right) \lambda^3 \right]}{U [-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2]}. \quad (1)$$

Так как по свойству пограничного слоя Прандтля давление на поверхность крыла равно давлению на наружную поверхность слоя, то на наружной поверхности слоя по предыдущему давлению изменяется по линейному закону. Отсюда следует, что

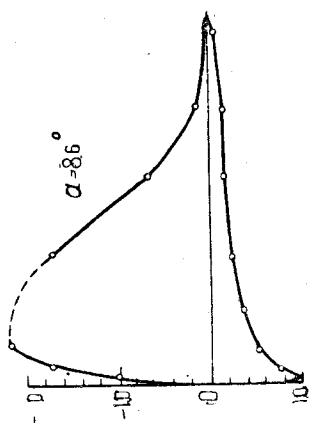
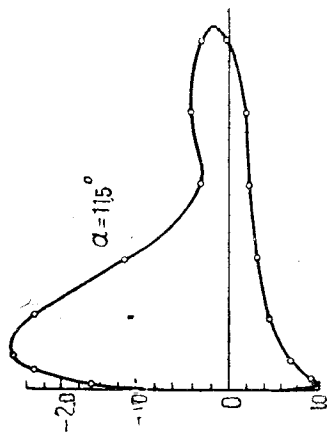
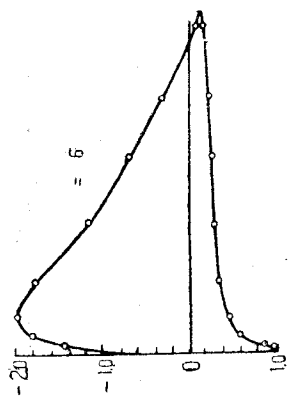
$$\frac{dp}{dx} = c. \quad (2)$$

Но по теореме Бернулли-Лапласа имеем:

$$p = C - \frac{\rho U^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dx} = \rho U \frac{dU}{dx}. \quad (4)$$



Фиг. 39.

Так как $\frac{d^2 p}{dx^2} = 0$, то имеем:

$$U \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 = 0,$$

а потому

$$\frac{U U''}{U'^2} = -1. \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (1), имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0.8 [-9072 + 1670,4\lambda - 42,6\lambda^2]}{U [-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2]} \quad (5)$$

Но:

$$z = \frac{\lambda}{U'} \text{ и } \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{d\lambda}{dx}}{U'} - \lambda \frac{U''}{U'^2}.$$

Подставляя это уравнение, получим:

$$\frac{d\lambda}{dx} \frac{U}{U'} = \frac{0,8 [-9072 + 1670,4 - 42,6\lambda^2]}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2} - \lambda$$

или

$$\frac{d\lambda}{dx} \frac{U}{U'} = \frac{-7257,6 + 1549,4\lambda - 39,8\lambda^2 - \lambda^3}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2} = \frac{1}{R(\lambda)}.$$

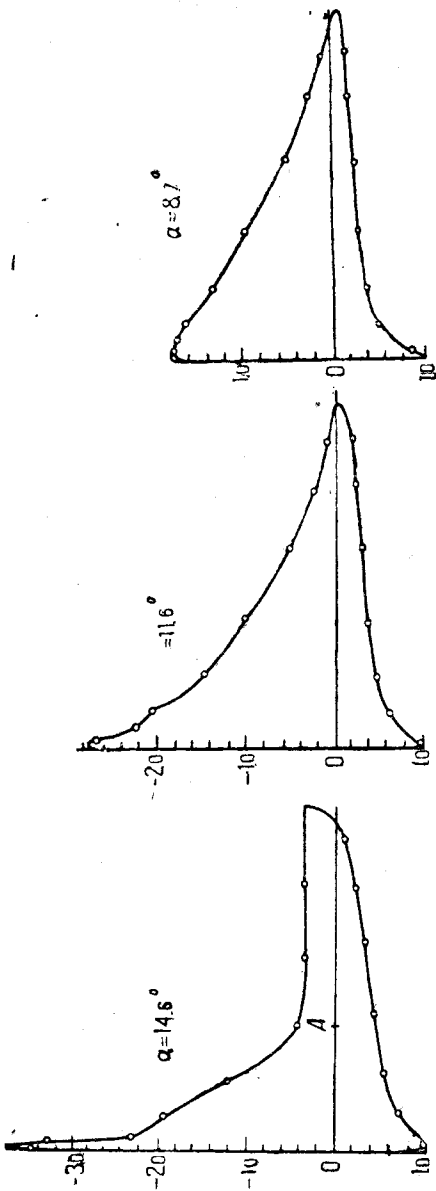
Отсюда

$$\lambda R(\lambda) = \frac{U' dx}{U}. \quad (6)$$

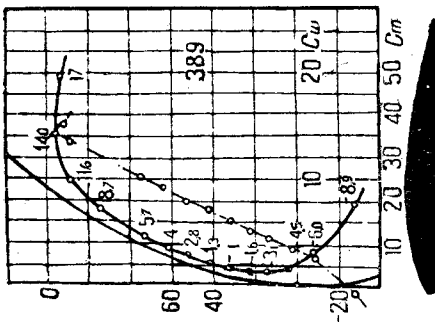
Проинтегрируем обе части в следующих пределах. Будем измерять x от той точки поверхности, где скорость максимальная (т.е. где давление наименьшее); так как $\lambda = U' = U z \frac{h^2}{y}$,

где h толщина слоя, то в этой точке $\lambda = 0$. В точке срыва, как было показано в § 1, $\lambda = -12$; называя расстояние от $x = 0$ до точки срыва через x_0 , получим из (6)

$$\int_0^{x_0} \frac{U' dx}{U} = \int_0^{-12} \frac{R(\lambda) d\lambda}{\lambda}.$$



Фиг. 40.



Отсюда

$$\ln \frac{U(x_0)}{U(0)} = - \int_{-12}^{+0} R(\lambda) d\lambda, \quad (7)$$

где $U(x_0)$ — скорость в точке отрыва струй и $U(0)$ — наибольшая скорость в точке верхней поверхности крыла; будем ее называть U_{\max} , скорость в точке отрыва — U_0 .

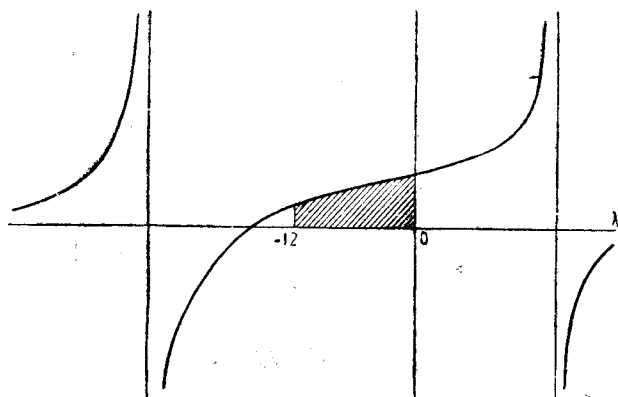
Найдем величину интеграла (7). График кривой $y=R(\lambda)$ имеет вид, указанный на фиг. 41.

Искомый интеграл представляет площадь, заштрихованную на фигуре. Применяя способ трапеций и замечая, что

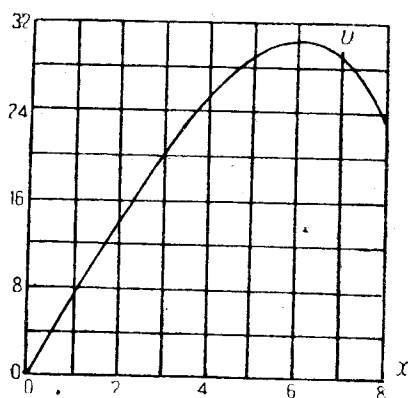
$$R(0) = 0,03 \text{ и} \\ R(-12) = 0,0045,$$

имеем:

$$\int_{-12}^0 R(\lambda) d\lambda = \frac{0,03 + 0,0045}{2} 12 = 0,201.$$



Фиг. 41.



Фиг. 42.

Приближенно будем считать его равным 0,2. Тогда из (7) имеем:

$$\frac{U_0}{U_{\max}} = e^{-0,2},$$

и

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = e^{0,2} = 1,2. \quad (8)$$

Отсюда получаем следующий основной результат: в случае, если в интервале от точки, где скорость потока наибольшая (и следовательно, давление наименьшее) до точки срыва давление изменяется по линейному закону, отношение наибольшей скорости потока к скорости в точке срыва равно 1,2.

Заметим, что линейность распределения давления является основным условием для получения этого результата. При обтекании тел, сильно уклоняющихся по форме от формы крыла, линейный закон распределения давления совершенно не выполняется; поэтому и полученный вывод будет совершенно неприложим к случаю обтекания цилиндра.

¹ Точнее см. § 9 гл. II.

Следующий график (фиг. 42) дает распределение скоростей у цилиндра по данным Хименца-Польгаузена¹, так как $U_{\max}=30,5$ и точка срыва получается при $x=6,94$, где $U_0=29,5$, то приближенно

$$\frac{U_{\max}}{U_0}=1,04,$$

что совершенно не согласуется с полученным выше результатом. Повидимому, в настоящем случае сильно сказывается кривизна цилиндра, в то время как у крыла кривизна в пределах рассматриваемой части верхней поверхности крыла незначительна.

Этот пример показывает, что для очень толстых крыльев (большое ϵ) или для крыльев с сильно изогнутым скелетом (большое α) полученный результат не имеет места.

§ 7. Полученный вывод позволяет сейчас же решить вопрос об определении тех углов атаки, до которых данное крыло работает в условиях полного обтекания. Будем называть такие углы предельными углами атаки. При решении поставленной задачи ограничимся, как и выше, крылом типа инверсии параболы.

При условии полного обтекания при предельном угле точкой атаки срыва является задняя кромка, которой соответствует значение $\lambda=0$. В этом случае по формуле:

$$U_{\zeta}=V_{\infty}\cos\left(\theta-\frac{\lambda}{2}\right)\frac{(1-\epsilon)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-4(1-\epsilon)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+4\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\epsilon)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2(1-\epsilon)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\frac{\lambda}{2}}}$$

скорость V_0 получится в виде:

$$V_0=V_{\infty}\cos\theta(1-\epsilon)\cos\frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Так как наибольшая скорость получается около передней кромки, которая при малых $\frac{\alpha}{2}$ получается приблизительно при $\lambda=\pi$, то по формуле (1) получаем:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= V \sin \theta \frac{[(1-\epsilon)^2-4(1-\epsilon)]\cos^2\frac{\alpha}{2}+4}{\sqrt{[(1-\epsilon)^2-2(1-\epsilon)]\cos^2\frac{\alpha}{2}+1}} = \\ &= V \sin \theta \frac{(1+\epsilon)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

При малом α можно считать $\cos\frac{\alpha}{2}=1$. Тогда

$$U_{\max}=V\sin\theta\frac{(1+\epsilon)^2}{\epsilon}. \quad (3)^2$$

¹ K. Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichungen der laminaren Grenzschicht Abh. a. d. Aerodyn. Inst. an. d. Technisch. Hoch. Aachen, H. 1. S. 31.

² Заметим, что полученный результат близко подходит к приближенной формуле, данной у В. В. Голубева в Теории крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. Стр. 135.

Из (2) и (3) имеем:

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = \operatorname{tg} \theta \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}. \quad (4)$$

По результатам предшествующего параграфа в случае, если точка отрыва находится на задней кромке, имеем:

$$\frac{U_{\max}}{U_0} = 1,2.$$

Подставляя это значение в (4), получим следующую формулу для определения предельного угла атаки:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,2 \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $\varepsilon = 0,5$; тогда $\theta = 2^\circ 50'$.

При $\varepsilon = 0,1$:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,2 \frac{0,1 \cdot 0,9}{1,21} = 0,09; \quad \theta = 5^\circ 9'.$$

При $\varepsilon = 0,2$:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,2 \frac{0,2 \cdot 0,8}{1,44} = 0,14; \quad \theta = 8^\circ.$$

При $\varepsilon = 0,3$:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,2 \frac{0,3 \cdot 0,7}{1,69} = 0,15; \quad \theta = 8^\circ 30' \quad 1.$$

Если рассматривать крылья конечного размаха, то так как поправка на скос потока получается в рассматриваемых случаях около 3° , то находящиеся предельные углы атаки θ_0 в рассматриваемых случаях получим в виде:

$$\varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,2; \varepsilon = 0,3; \\ \theta_0 = 8^\circ; \theta_0 = 11^\circ; \theta_0 = 11^\circ 30'.$$

Заметим, что данный результат в точности справедлив для симметричного крыла ($\alpha = 0$; руль Н. Е. Жуковского²), но приближенно он верен при всяком малом α .

Из формулы (5) видно, что при очень малом ε и θ также весьма мало; так, если $\varepsilon = 0,05$, то по (5) найдем $\theta = 3^\circ 20'$, и кажущийся угол атаки будет около 5° .

Нетрудно найти крыло, которое работает на обтекание при наибольшем угле атаки.

Из (2) и (3) имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = 1,23 \frac{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}}{\left((1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)},$$

или

$$\operatorname{tg} \theta = 1,23 \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \varepsilon)}}{(1 + \varepsilon)^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

причем (6) справедливо только при малом α , так как иначе предположение, что U_{\max} получается при $\lambda = \pi$ не имеет места.

¹ Необходимо помнить, что при больших ε точка с U_{\max} уже значительно удалена от передней кромки и формула (5) дает приближение весьма неточное.

² См., например, В. В. Голубев, Теория крыла в плоскопараллельном потоке, стр. 124.

и, подставляя в первое из уравнений уравнение (7), имеем

$$(\varepsilon - 1)(1 + 2\varepsilon - 3\varepsilon^2) = 0,$$

откуда $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = -\frac{1}{3}$. Второй ответ не годится, а при первом t мнимое.

Итак, единственным годным решением является $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0$, т.е. $\alpha = 0$.

Итак, *выгоднейшим крылом, которое работает на обтекание при наибольшем угле атаки, является руль Н. Е. Жуковского (симметричная инверсия параболы), для которого $\varepsilon = \frac{1}{3}$.*

В этом случае, как было показано, предельный угол атаки (с поправкой на скос потока) равен $11^\circ 30'$.

На фиг. 43 дано построение Трефца для случая выгоднейшего крыла ($\varepsilon = \frac{1}{3}$).

То обстоятельство, что увеличение ε сверх известной границы влечет за собой ухудшение свойств крыла ввиду уменьшения предельного угла атаки, ясно хотя бы из того, что при безграничном увеличении ε получается в пределе круглый цилиндр, который обтекается с отрывом струй при всяких углах атаки.

Для сравнения приведена диаграмма Лилиентала весьма толстого крыла (фиг. 44).

§ 8. Предельные углы атаки, получаемые при помощи формулы (5) или (9) предшествующего параграфа, оказываются слишком малыми. Изучение экспериментальных данных показывает, что в действительности крылья работают на обтекание при углах атаки, значительно превосходящих границу, даваемую этими формулами. Особенно значительное расхождение получается при очень малых ε , т.е. для крыльев очень тонких.

Для выяснения причин этого расхождения разберем отдельно случай тонких и толстых крыльев.

В случае тонкого крыла, как показали исследования Н. Е. Жуковского, Ф. В. Шмидта и С. Н. Мичурина, образуется у передней кромки крыла вихревой насадок; действие этого насадка сводится к тому, что за счет насадка увеличивается величина ε , т.е. крыло становится как бы толще. В результате этого предельный угол атаки увеличивается. Возможно, что этим и объясняется, главным образом, расхождение между теоретической и экспериментальной величинами предельного угла атаки у тонких крыльев.

Сложнее обстоит дело для крыльев толстых. Для решения этого вопроса найдем предварительно, при каком угле атаки *точка отрыва струй переходит в данную точку верхней поверхности крыла.*

По выведенным выше формулам:

$$U_\theta = V_\infty \cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \sin\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} \quad (1)$$

$$U_{\max} = V_\infty \sin \theta \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Так как для точки отрыва

$$\frac{U_{\max}}{U_\theta} = 1,2 \quad \text{или} \quad \frac{U_\theta}{U_{\max}} = 0,82,$$

то полагая приближенно $\alpha=0$, имеем:

$$\frac{\cos\left(\theta - \frac{\lambda}{2}\right)}{\sin \theta} \cdot \frac{(1-\epsilon)^2 - 4(1-\epsilon)\sin^2 \frac{\lambda}{2} + 4\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\epsilon)^2 - 2(1-\epsilon)\sin^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} \cdot \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2} = 0,82. \quad (1')$$

Отсюда

$$\left(\operatorname{ctg} \cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2} \right) \frac{(1-\epsilon)^2 + 4\epsilon \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{(1-\epsilon)^2 + 2\epsilon \sin^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon^2)} = 0,82.$$

Ограничиваясь первыми степенями ϵ , отсюда получим:

$$\left(\operatorname{ctg} \theta \cos \frac{\lambda}{2} + \sin \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\epsilon}{\cos \frac{\lambda}{2}} = 0,82,$$

или

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{0,82}{\epsilon} - \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда:

$$\theta = \arccos \operatorname{tg} \left(\frac{0,82}{\epsilon} - \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \right)$$

и

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\epsilon^2}{1,2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}}. \quad (3)$$

Таким образом *скорость перемещения точки отрыва по верхней поверхности крыла прямо-пропорциональна ϵ^2 и обратно-пропорциональна квадрату угла атаки*. Или скорость изменения угла атаки при перемещении точки отрыва прямо-пропорциональна квадрату ϵ и обратно-пропорциональна $\cos^2 \frac{\lambda}{2}$. Следовательно, скорость изменения угла атаки возрастает при увеличении ϵ и медленнее всего происходит в начале отхода от задней кромки (т. е. когда $\lambda=0$).

Отсюда следует практически важный результат. У толстых крыльев (ϵ большое) при перемещении точки отрыва угол атаки изменяется сильнее, чем у тонких. Следовательно, изменения угла атаки сильнее сказывается у тонких крыльев.

Предыдущий вывод сделан в предположении, что ϵ весьма мало, так что членами выше первой степени относительно ϵ можно пренебречь. Для больших ϵ более надежна следующая оценка. Найдем, при каком значении угла атаки точка отрыва дойдет до середины крыла.

Так как середине крыла соответствует значение $\lambda = \frac{\pi}{2}$, то формула (1') примет вид:

$$\frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin \theta} \cdot \frac{1 + \epsilon^2}{\sqrt{1 - 2\epsilon + 2\epsilon^2}} \sqrt{2} \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon^2)^2} = 0,82,$$

или

$$(\operatorname{ctg} \theta + 1) \frac{1 + \epsilon^2}{\sqrt{1 - 2\epsilon + 2\epsilon^2}} \cdot \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon^2)^2} = 0,82,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{(1 + \epsilon^2)^2}{1,23 \epsilon (1 + \epsilon^2)^2} \sqrt{1 - 2\epsilon + 2\epsilon^2} - 1. \quad (4)$$

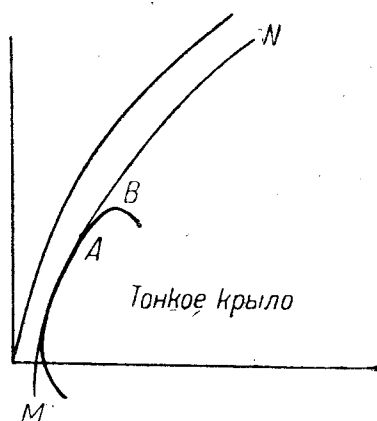
По формуле (4) можно рассчитать соответствующий угол атаки. Вычисляем по ней θ при различных значениях ε . Получаем:

при	$\varepsilon=0,05,$	$\operatorname{ctg} \theta=16,4,$	$\theta=3^{\circ}30';$
	$\varepsilon=0,1,$	$\operatorname{ctg} \theta=7,99,$	$\theta=7^{\circ}50';$
	$\varepsilon=0,2,$	$\operatorname{ctg} \theta=3,54,$	$\theta=18^{\circ}10';$
	$\varepsilon=0,3,$	$\operatorname{ctg} \theta=2,18,$	$\theta=24^{\circ}25'.$

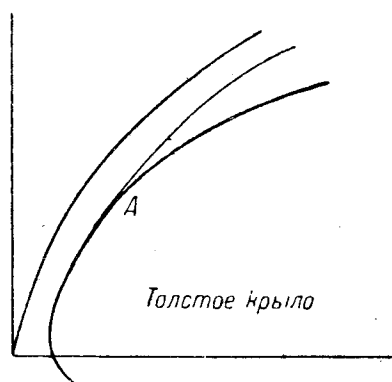
Сравним эти данные с углами, при которых начинается отход отрыва струи от задней кромки. Называя предельный угол атаки θ_0 и углы найденные сейчас через θ , имеем:

$\varepsilon=0,05,$	$\theta_0=2^{\circ}50',$	$\theta=3^{\circ}30',$	$\Delta\theta=\theta-\theta_0=0^{\circ}40';$
$\varepsilon=0,1,$	$\theta_0=5^{\circ}9',$	$\theta=7^{\circ}50',$	$\Delta\theta=2^{\circ}41';$
$\varepsilon=0,2,$	$\theta_0=8^{\circ},$	$\theta=18^{\circ}10',$	$\Delta\theta=10^{\circ}10';$
$\varepsilon=0,3,$	$\theta_0=8^{\circ}30',$	$\theta=24^{\circ}25',$	$\Delta\theta=15^{\circ}55'.$

Отсюда получается следующий практически важный результат: у крыльев тонких ($\varepsilon=0,05$) точка отрыва струй очень быстро перемещается по крылу после отхода от задней кромки, так что при очень малом уве-



Фиг. 45а.



Фиг. 45б.

личении угла атаки за предельный угол крыло начинает работать все целиком на срыв, что должно вызывать резкое уменьшение подъемной силы и увеличение лобового сопротивления. При увеличении толщины крыла перемещение точки отрыва в зависимости от увеличения угла атаки за предельный угол становится все более медленным, а следовательно, ухудшение летных свойств крыла происходит сравнительно медленно в зависимости от увеличения угла атаки.

Если изобразить этот результат на диаграмме Лилиенталя, то получим следующие теоретические схемы поляра Лилиенталя для тонких и толстых крыльев (фиг. 45).

У тонкого крыла поляра Лилиенталя на малых углах идет эквидистантно параболе индуктивного сопротивления (благодаря сопротивлению поверхности); затем в исходной точке А, которая соответствует предельному углу атаки, она отходит от эквидистантной кривой МN и очень близко к А получает точку, которая соответствует углу атаки, при котором крыло целиком начинает работать на срыв.

Для толстых крыльев за предельным углом атаки, которому соответствует точка А, кривая медленно отходит от эквидистантной кривой, и режим полного отрыва струй наступает при углах, значительно больших предельного угла атаки.

Как было указано выше, образование воздушных вихревых насадков у передней кромки крыльев смягчает переход от режима полного обтекания к режиму полного отрыва струй. Благодаря этому поляры тонких крыльев не так резко отличаются от поляра для крыльев толстых. Сравнительно медленный отход поляры для тонких крыльев от кривой MN , повидимому, и указывает на образование воздушных вихрей насадков, так как отход, благодаря смещению точки отрыва, по предыдущему привел бы очень быстро тонкое крыло к режиму полного срыва струй.

Весьма вероятно, что незначительное смещение точки отрыва от задней кромки почти не отражается на летных свойствах крыла, а следовательно, и на его поляре. Поэтому на поляре Лилиенталя точка A (или A_1), соответствующая началу отхода точки отрыва струй от задней кромки, в действительности отмечает такой режим, когда точка отрыва уже настолько отошла от задней кромки, что это перемещение делается заметным, благодаря значительному уменьшению подъемной силы и соответствующему увеличению лобового сопротивления. Этим, возможно, и объясняется значительная разница между предельными углами, которые дает теория, и теми предельными углами, которые дает, например, изучение поляра Лилиенталя; на полярах соответствующие углы атаки для толстых крыльев (ε от 0,2 до 0,3) получаются в среднем градусов на 5 больше тех, которые дает теория.

В среднем можно считать по данным Геттингенской лаборатории соответствующие углы атаки такими:

$\varepsilon = 0,1,$	$\theta'_0 = 12^\circ,$ ¹	вместо	$\theta_0 = 8^\circ;$
$\varepsilon = 0,2,$	$\theta'_0 = 15^\circ,$	" "	$\theta_0 = 11^\circ;$
$\varepsilon = 0,3,$	$\theta'_0 = 17^\circ,$	" "	$\theta_0 = 11^\circ 30',$

где θ_0 вычислена по формуле (5) § 7.

§ 9. Все предшествующие выводы получаются из предположения о линейности изменения давления вдоль верхней поверхности крыла от точки, где давление минимальное, до точки отрыва струи. Естественно поставить вопрос о том, нельзя ли все сделанные выводы сохранить и при более широких предположениях о законе изменения давления.

Легко видеть, что все выводы можно с такою же легкостью проделать и при более широком предположении. Основное уравнение Польгаузена имеет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U^2} \right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU''}{U^2} \right) \lambda^3 \right]}{U[-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2]},$$

где $\lambda = U'z$, откуда $z = \frac{\lambda}{U'}$:

$$\frac{d\lambda}{dx U'} - \lambda \frac{U'' U}{U'^2} = \frac{0,8 \left[-9072 + 1670,4\lambda - \left(47,4 + 4,8 \frac{UU''}{U^2} \right) \lambda^2 - \left(1 + \frac{UU''}{U^2} \right) \lambda^3 \right]}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}. \quad (1)$$

Очевидно, что уравнение приведет к разделению переменных, если

$$\frac{UU''}{U'^2} = C. \quad (2)$$

Вся предшествующая теория получена в предположении, что $C = -1$. Выясним, какие получатся результаты при любом C .

¹ θ'_0 с поправкою на конечное удлинение.

Из уравнения (2) имеем:

$$U' = AU^c. \quad (3)$$

Так как по условию задачи в рассматриваемом интервале $u' < 0$, то A надо считать отрицательным, а потому будем (3) писать в виде:

$$U' = -AU^c. \quad (3')$$

Из (3) окончательно:

$$U = (B - A(1 - C)x)^{\frac{1}{1-c}}. \quad (4)$$

Уравнение (2) не содержит x ; поэтому можно считать x от произвольной точки поверхности крыла. Будем считать x от той точки, где скорость наибольшая и пусть расстояние от нее до точки отрыва есть l . Тогда при $x=0$ $U=V_{\max}$; при $x=l$ $U=V_0$.

Тогда из (4) имеем:

$$U = \left[V_{\max}^{1-c} - (V_{\max}^{1-c} - V_0^{1-c}) \frac{x}{l} \right]^{\frac{1}{1-c}}, \quad (5)$$

или, полагая

$$\frac{V_{\max}}{V_0} = m, \quad (6)$$

имеем:

$$U = V_{\max} \left[1 - \left\{ 1 - \frac{1}{m^{1-c}} \right\} \frac{x}{l} \right]^{\frac{1}{1-c}}. \quad (7)$$

Формула (7) годится при $C < 1$; при $C > 1$ подобным же образом получим:

$$U = V_0 \left[\frac{x}{l} + m^{1-c} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]^{\frac{1}{1-c}},$$

или, обозначая $l - x = y$, получим:

$$U = \frac{V_0}{\left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{m^{c-1}} \right) \frac{y}{l} \right\}^{\frac{1}{c-1}}}. \quad (8)$$

Наконец при $C=1$ получим:

$$U = V_{\max} \frac{1}{m^{\frac{x}{l}}}. \quad (9)$$

Выясним характер кривых, даваемых формулами (7), (8), (9).

Для этого выясним, как изменяется m в зависимости от C .

Подставляя вместо $\frac{UU''}{U'^2} = C$ в уравнение Польгаузена, приведем его к виду:

$$\frac{dU}{U} = \frac{f(\lambda)d\lambda}{\varphi(\lambda) + C\Psi(\lambda)} = R(\lambda)d\lambda, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^2 + 5,76\lambda - 213,12, \\ \varphi(\lambda) &= 0,8\lambda^3 + 37,92\lambda^2 + 1336,32\lambda - 7257,6, \\ \Psi(\lambda) &= -0,2\lambda^3 + 1,92\lambda^2 - 213,12\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) имеем:

$$\ln \frac{U_{\max}}{U_0} = \int_{-12}^0 R(\lambda) d\lambda. \quad (12)$$

Для вычисления интеграла составим таблицы значений функций $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ для целых λ от 0 до -12.

Значения функций f , φ , ψ .

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 5,76\lambda - 213,12$$

λ	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
$f(\lambda)$	-213,12	-217,88	-220,40	-221,40	-220,16	-216,92	-211,68	-204,44	-195,20	-183,96	-170,72	-155,48	-138,24

$$\varphi(\lambda) = -0,8\lambda^3 - 37,92\lambda^2 + 1336,32\lambda - 7257,6$$

λ	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
$\varphi(\lambda)$	-7257,6	-8631,04	-10075,52	-11586,24	-13158,40	-14787,20	-16467,84	-18195,52	-19965,44	-21772,80	-23612,80	-25479,64	-27371,52

$$\psi(\lambda) = -0,2\lambda^3 + 1,92\lambda^2 - 213,12\lambda$$

λ	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
$\psi(\lambda)$	0	214,84	432,32	651,24	870,40	1088,60	1304,64	1517,32	1725,44	1927,80	2123,20	2310,44	2488,32

По этим данным легко рассчитать приближенно значения интеграла; мы применим для этого приближенную формулу трапеций:

$$S = \int_{-12}^0 R(\lambda) d\lambda = \frac{R(0) + R(-12)}{2} + R(-1) + R(-2) + \dots + R(-11).$$

Следующая таблица дает значения S для различных значений C .

C	S	C	S	C	S
-60	0,046	-6	0,127	3	0,204
-50	0,050	-5	0,132	4	0,224
-40	0,060	-4	0,137	5	0,242
-30	0,070	-3	0,144	6	0,271
-20	0,086	-2	0,152	7	0,306
-10	0,109	-1	0,160	8	0,366
-9	0,115	0	0,170	9	0,458
-8	0,118	1	0,179	10	0,662
-7	0,123	2	0,191	11	

Отсюда

$$m = \frac{U_{\max}}{U_0} = e^S.$$

Подставляя значения m в формулы (7), (8) и (9), получим соответствующее изменение скорости вдоль верхней поверхности крыла.

Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $C = -60$, тогда $m = 1,047$, а $m^{1-c} = 4$.

При $x = \frac{l}{2}$ получим:

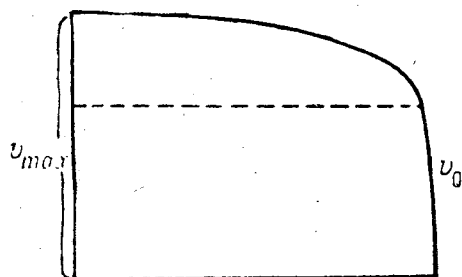
$$U = V_{\max} \left[1 - \frac{3}{8} \right]^{\frac{1}{61}} = V_{\max} [1 - 0,006],$$

т. е. U почти в точности равно V_{\max} .

При $C = -1$ $m = 1,2$. Полагая $x = \frac{l}{2}$, получим:

$$U = V_{\max} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{1,44} \right) \frac{1}{2} \right]^2 \approx 0,72 V_{\max}.$$

Таким образом в рассматриваемых случаях кривая имеет вид, приближенно указанный на фиг. 46. Такой план распределения давлений получается при $C < -1$. В этом случае и распределение давлений следует такому же типу; его можно назвать вогнутым типом распределения давлений; ему соответствует значение $m < 1,2$ (точнее 1,17).



Фиг. 46.

При $m = 1,2$ получаем линейное распределение давлений; этот случай для крыла можно назвать нормальным типом распределения давлений.

Наконец, при $m > 1,2$ ($C > -1$) имеем распределение давлений, изображаемое выпуклой кривой; этот тип

можно назвать выпуклым типом распределения давлений.

Все эти три типа схематически изображены на фиг. 47: I — вогнутый тип, II — нормальный тип, III — выпуклый тип.

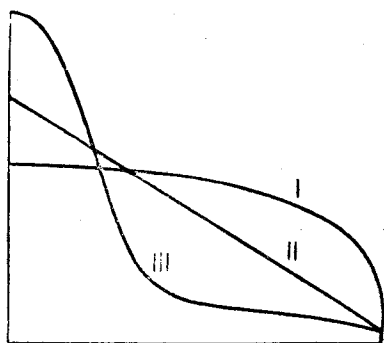
Отсюда получаем следующий приближенный метод для определения точки отрыва струй.

Среди кривых распределения скоростей (или давлений), даваемых формулами (7), (8), (9), надо найти наиболее подходящую к эмпирическому распределению и по ней определить C и m . По найденным значениям m и C можно также определить точку отрыва, как это сделано в настоящей главе для случая нормального распределения давлений.

Заметим, что для случая круглого цилиндра по этой схеме надо взять C около -60 .

Заканчивая настоящую главу, считаем нужным отметить, что теория отрыва струй от поверхности крыла, повидимому, является при настоящем развитии аэродинамической теории основной задачей, полное решение которой чрезвычайно важно для решения технических вопросов, связанных с улучшением конструкции крыла. Приведенное выше приближенное решение представляет только первый шаг к полному аэродинамическому решению поставленной задачи.

Все приближенное решение, приведенное в настоящей главе, основывается на предположении о линейности распределения давления на верх-



Фиг. 47.

ней поверхности крыла. Возникает вопрос, нельзя ли обойтись без этого предположения.

Следующий прием естественно намечается для решения этой задачи. Предположим сначала, что при данном угле атаки отрыв начинается в задней кромке крыла. Тогда, применяя общие теоремы, получим распределение давлений $U_1(x)$ на верхней поверхности слоя, а по уравнению Польгаузена и соответствующее положение точки отрыва x_1 . Это дает первое приближение положения точки отрыва. Имея точку отрыва, строим соответствующее обтекание и новое распределение скоростей на наружной поверхности слоя $U_2(x)$, и по нему, применяя уравнение Польгаузена, найдем более точное положение точки отрыва x_2 . Применяя несколько раз такое построение, найдем последовательно $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, и, предполагая, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, что весьма вероятно, найдем действительное положение точки отрыва $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Но такой метод определения точки отрыва, представляющий собой метод последовательных приближений, фактически невыполним при настоящем состоянии теории по следующим причинам.

Во-первых, задав точку отрыва струй от поверхности крыла, весьма трудно определить характеристическую функцию течения и распределение скоростей на поверхности обтекаемого тела, ввиду чрезвычайной сложности теории струй для случая кривых поверхностей.

Во-вторых, определение точки отрыва при заданном U на внешней поверхности слоя требует интеграции уравнения Польгаузена, что представляет большие вычислительные трудности.

С точки зрения изложенных выше соображений разработка двух вышеуказанных частных задач и является в настоящее время очередным вопросом теории крыла аэроплана.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Теория работы предкрылка

§ 1. Общие соображения. § 2. Основная формула. § 3. Определение скорости у предкрылка. § 4. Окончательные формулы для предкрылка; приближенное решение. § 5. Точная формула. § 6. Конструктивные выводы. § 7. Экспериментальные данные. § 8. Действие крыла на предкрылок. § 9. Распределение скоростей у поверхности предкрылка. § 10. Замечания о распределении давлений у крыла.

§ 1. Результаты предшествующей главы показывают, что отрыв струй имеет место в случае, если падение скорости достигает известной величины. Отсюда следует, что всякие методы, позволяющие выравнивать распределение скоростей на верхней поверхности крыла, увеличивают предельный угол обтекания крыла и, следовательно, улучшают его работу. Таких методов можно указать несколько, но наиболее простой и практически применимый состоит в добавлении вихря у поверхности крыла, позволяющего выравнивать распределение скоростей. Конструктивно такой вихрь осуществляется добавлением к крылу дополнительного крылышка, работающего на обтекание и, следовательно, вызывающего в потоке, обтекающем крыло, такой же эффект, как вихрь, помещенный около поверхности крыла. Отсюда намечается следующая основная задача: *определить влияние вихря, помещенного около поверхности крыла, на распределение скоростей у верхней поверхности крыла*. С решения этой задачи мы и начнем.

Характеристическая функция обтекания цилиндра при наличии вихря интенсивности Γ в точке $\alpha^* = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho > 1$) и при основной циркуляции K вокруг цилиндра удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\omega}{dz} = Ve^{-\eta_0} \left(1 - \frac{e^{2\eta_0}}{z^2} \right) - \frac{K}{2\pi i} \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z - \rho e^{i\varphi}} - \frac{1}{z - \frac{1}{\rho} e^{i\varphi}} \right\}. \quad (1)$$

Предполагая, как это мы делали и раньше, что точка схода помещается в точке цилиндра $z=1$, имеем:

$$Ve^{-\eta_0} \left(1 - e^{2\eta_0} \right) - \frac{K}{2\pi i} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{1 - \rho e^{i\varphi}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\rho} e^{i\varphi}} \right\} = 0. \quad (2)$$

Исключая K из уравнений (1) и (2), найдем:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{z-1}{z} \left[Ve^{-\eta_0} \left(1 + \frac{e^{2\eta_0}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho} e^{i\varphi}}{\left(1 - \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} \right) \left(z - \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} \right)} - \frac{\rho e^{i\varphi}}{\left(1 - \rho e^{i\varphi} \right) \left(z - \rho e^{i\varphi} \right)} \right\} \right].$$

Функция, отображающая внешнюю часть цилиндра на внешнюю часть крыла на плоскости ζ , имеет вид¹:

$$\zeta = (z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} - (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{(1-\varepsilon)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Отсюда:

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{-\frac{\alpha}{2}i} \frac{(z-1) \left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right]}{\left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right]^2}$$

и

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \left[Ve^{-\theta i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho}e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho}e^{\varphi i} \right) \left(z - \frac{1}{\rho}e^{\varphi i} \right)} - \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})(z - \rho e^{\varphi i})} \right\} \right] \cdot e^{\frac{\alpha}{2}i} \frac{\left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right]^2}{z \left[(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right]}. \quad (4)$$

Отсюда получим скорость V_0 для точки схода, положив $z=1$:

$$V_0 = \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|_{z=1} = \left[V 2 \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho}e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho}e^{\varphi i} \right)^2} - \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})^2} \right\} \right] \frac{(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2}}{2},$$

или

$$V_0 = \left[2 V \cos \theta + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi}{\left[\rho + \frac{1}{\rho} - 2 \cos \varphi \right]^2} \right] \frac{(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}}{2}. \quad (5)$$

Для определения наибольшей скорости заметим, что она получается около передней кромки крыла; приближенно можно принять, что наибольшая скорость V_{\max} получится при $z=-1$.

Тогда из (4):

$$V_{\max} = \left[2 V \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})(1 + \rho e^{\varphi i})} - \frac{\frac{1}{\rho}e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho}e^{\varphi i} \right) \left(1 + \frac{1}{\rho}e^{\varphi i} \right)} \right\} \right] \frac{\left| -2e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| -2e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|},$$

¹ См. § 2. гл. II.

или, подставляя:

$$\begin{aligned} & \left| -2e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1+\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \left| -2 \cos \frac{\alpha}{2} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \\ & = (1+\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4(1-\varepsilon) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4; \\ & \left| -2e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \left| -2 \cos \frac{\alpha}{2} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \right|^2 = \\ & = \sqrt{4\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ & = 2 \sqrt{(1-\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2(1-\varepsilon) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1}, \end{aligned}$$

имеем:

$$V_{\max} = \left[2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi}{\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) - 2 \cos 2\varphi} \right] \frac{(1+\varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}. \quad (6)$$

Для оценки формул (5) и (6) заметим, что у крыльев угол α весьма мал; поэтому заменяя приближенно $\cos \frac{\alpha}{2}$ через 1 и $\sin \frac{\alpha}{2}$ через 0, имеем:

$$\begin{aligned} V_0 &= \left[2V \cos \Theta + \frac{\Gamma \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi}{\pi \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2 \cos 2\varphi \right)^2} \right] \frac{1-\varepsilon}{2} \\ V_{\max} &= \left[2V \sin \Theta - \frac{\Gamma \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi}{\pi \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2 \cos 2\varphi \right)} \right] \frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6')$$

Для выравнивания скоростей на верхней поверхности крыла нужно увеличить V_0 и уменьшить V_{\max} ; этого мы достигнем, если:

$$\Gamma \sin \varphi > 0 \text{ и } \Gamma \cos \varphi > 0. \quad (7)$$

Чтобы удовлетворить уравнениям (7), надо:

при $\Gamma > 0$ взять φ в первой четверти,

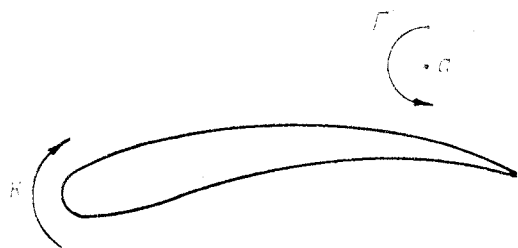
при $\Gamma < 0$ взять φ в третьей четверти.

Соответствующее расположение крыла и вихря в том и другом случае ясно из фиг. 48 и 49.

Чтобы осуществить конструктивно первый случай, надо было бы поместить у задней кромки крыла над его верхней поверхностью перевернутое крыло (фиг. 50), при этом, однако, заметим, что такая конструкция мало выгодна по следующим причинам.

1. Скорость около задней кромки сравнительно мала, а потому и

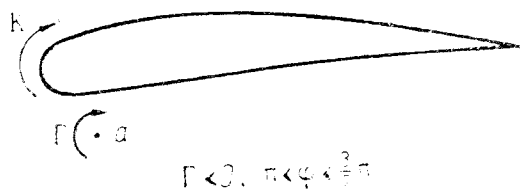
интенсивность вихря Γ получится незначительная, а потому и выравнивание скоростей будет слабое.



Фиг. 48.

2. Сила, действующая на крыло B , направлена вниз, а потому она уменьшает подъемную силу всего разрезного крыла.

Заметим, что второе соображение отпадает, если вихрь B не принадлежит к несущей системе крыла; повидимому, это имеет место при наличии вихрей, отходящих от предкрылка. К разбору этого вопроса мы вернемся в другой работе.



Фиг. 49.



Фиг. 50.

Удовлетворить второму случаю мы можем, поместив добавочное крыло у передней кромки под крылом ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$) или перед крылом ($\alpha = \pi$). Выгоднее помещение перед крылом, так как около передней кромки крыла скорость наибольшая, а потому можно достигнуть наибольшего значения Γ . Это и приводит, очевидно, к применению для улучшения летных качеств крыла так называемого предкрылка.

§ 2. Из результатов предшествующего параграфа легко получить окончательные формулы для случая предкрылка.

Полагая $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$, получим для скорости максимальной и для скорости в задней кромке выражения:

$$V_{\max} = \left[2V \sin \theta + \frac{\Gamma \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)}{\pi \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} - 2 \right)} \right] \frac{(1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ = \left[2V \sin \theta + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \right] \frac{(1 + \varepsilon) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (1)$$

$$V_0 = V \cos \theta (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Так как по результатам гл. II для случая срыва с задней кромки $\frac{V_{\max}}{V_0} = 1,2$, то имеем уравнение:

$$\operatorname{tg} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi V} \frac{\rho}{(\rho^2 - 1) \cos \theta} = \frac{1,2 (1 - \varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{(1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Ввиду малости угла α можно получить приближенно $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$ и $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$; получаем:

$$\operatorname{tg} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi V} \frac{\rho}{(\rho^2 - 1) \cos \theta} = \frac{1,2 \varepsilon (1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}, \quad (3')$$

а, замечая, что у предкрылка $I < 0$, и полагая $|I| = I$, окончательно имеем:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1,2 \varepsilon (1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2} + \frac{I}{2\pi V} \frac{\rho}{(\rho^2 - 1) \cos \theta}. \quad (4)$$

Соответствующий предельный угол атаки без предкрылка θ_0 получится из (4) при $I = 0$. Итак:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1,2 \varepsilon (1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (5)$$

Отсюда получаем для приращения угла θ от действия предкрылка формулу:

$$\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{I}{2\pi V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \frac{1}{\cos \theta},$$

или

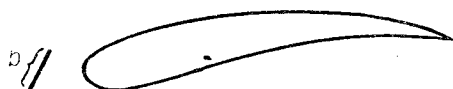
$$\sin(\theta - \theta_0) = \frac{I}{2\pi V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \cos \theta_0. \quad (6)$$

Приближенно:

$$\Delta \theta = \theta - \theta_0 = \frac{I}{2\pi V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \cos \theta_0. \quad (6')$$

Следовательно, для нахождения угла $\Delta \theta$ надо определить величину I .

Предположим, что предкрылок представляет собой небольшую плоскую пластинку, поставленную у передней кромки крыла (фиг. 51); тогда, называя ширину предкрылка через b , имеем по известной формуле теории крыла:



Фиг. 51.

$$I = \pi V_a b \beta^2,$$

где V_a — скорость потока около предкрылка и β — угол атаки предкрылка относительно направления скорости (от-

носительный угол атаки). Следовательно, определение I приводится к нахождению величины и направления скорости потока около предкрылка; эти две задачи мы теперь и разрешим.

§ 3. Для нахождения скорости у предкрылка мы имеем формулу (4) § 1; кроме того, надо помнить, что вихрь сам себе не создает скорости. Таким образом для определения скорости возьмем формулу:

$$\frac{dw}{dz} = \left[V e^{-\frac{1}{2}i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\frac{1}{\rho} e^{zi}}{\left(1 - \frac{1}{\rho} e^{zi} \right) \left(z - \frac{1}{\rho} e^{zi} \right)} \right] e^{\frac{z}{2}i} \frac{\left[(z-1) e^{-\frac{z}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2}{z \left[(z-1) e^{-\frac{z}{2}i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right]} \quad (1)$$

¹ См., например, В. В. Голубев, Теория крыла конечного размаха, стр. 161.

Следовательно, полагая $z = \rho e^{i\theta} = -\rho$, т. е. $\varphi = \pi$, имеем:

$$V_a = V e^{-\theta i} \left(1 - \frac{e^{2\theta i}}{\rho} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\frac{1}{\rho}}{\left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)} \left[\frac{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|} \right] =$$

$$= V \left| \left(e^{-\theta i} - \frac{e^{\theta i}}{\rho} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \right| \frac{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|}.$$

Рассмотрим член $\frac{\Gamma}{2\pi i V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1}$; взяв его модуль, получим:

$$\left| \frac{\Gamma}{2\pi i V} \frac{\rho}{\rho^2 - 1} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{|\Gamma|}{V} \frac{\rho}{(\rho-1)(\rho+1)} < \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi v(\rho-1)\rho}{V(\rho-1)(\rho+1)} = \frac{v}{V} \frac{\rho}{\rho+1},$$

где v — скорость, создаваемая присутствием вихря Γ в точках предкрылка. Во всех аналогичных случаях предполагаем, что скорость, создаваемая добавочными вихрями, мала сравнительно со скоростью потока; поэтому в сумме выделенным членом мы можем пренебречь и получим приближенную формулу:

$$V_a = V \left| e^{-\theta i} - \frac{e^{\theta i}}{\rho} \right| \frac{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|^2}{\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|}.$$

Так как

$$\left| e^{-\theta i} - \frac{e^{\theta i}}{\rho} \right| = \sqrt{\left(\cos\theta - \frac{\cos\theta}{\rho} \right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\rho} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta},$$

$$\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right|^2 =$$

$$= \left| -(\rho+\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} + i(\rho+1)\sin\frac{\alpha}{2} \right|^2 = (\rho+\varepsilon)^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} + (\rho+1)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

По малости α можно положить приближенно, что рассматриваемое выражение равно: $(\rho+\varepsilon)^2$.

$$\left| -(\rho+1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon)\cos\frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{(\rho-1+2\varepsilon)^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} + (\rho+1)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}};$$

и при малом α это выражение приближенно равно $(\rho-1+2\varepsilon)$, следовательно:

$$V_a = V \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta} \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho + 2\varepsilon)}. \quad (2)$$

При увеличении ρ , V_a стремится к V , что и нужно ожидать; при уменьшении ρ и приближении его к 1 выражение стремится к

$$V \sqrt{2(1 - \cos 2\theta)} \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2\varepsilon} = V \sin \theta \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon},$$

что и получено выше¹.

Нетрудно найти и направление скорости V_a . По общим формулам имеем, называя через μ угол, образуемый скоростью V_a с действительной осью:

$$V_a e^{-i\mu} = \frac{dw}{dz'} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dz'},$$

и при малом ε имеем приблизительно:

$$V_a e^{-i\mu} = V \left(e^{-i\theta} - \frac{e^{i\theta}}{\rho} \right) \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)},$$

откуда:

$$V_a (\cos \mu - i \sin \mu) = V \left[\cos \theta \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) - \sin \theta \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \cos \mu V_a &= V \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \cos \theta, \\ \sin \mu V_a &= V \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \sin \theta, \end{aligned}$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \theta \frac{\rho + 1}{\rho - 1}. \quad (3)$$

Из формулы (3) видим, что при увеличении ρ угол μ стремится к θ и при уменьшении ρ до 1 угол μ стремится к $\frac{\pi}{2}$. Так при $\theta = 20^\circ$ имеем:

$$\begin{array}{c|c|c} \text{при } \rho & 1,25 & 1,5 \\ \mu & 66^\circ & 61^\circ \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 47^\circ \end{array}$$

Формулы (2) и (3) и решают вполне задачу, поставленную в предыдущем параграфе.

§ 4. Мы можем теперь легко получить окончательные формулы, определяющие работу предкрылка.

Так как $I = \pi V_a b \beta$, то, подставляя значение V_a , получим:

$$I = \pi V \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta} b \beta, \quad (1)$$

где β — угол атаки предкрылка относительно набегающего на него потока.

Если назвать наклон предкрылка к действительной оси через γ , то из фиг. 52 видим:

$$\beta = \mu - \gamma, \quad (2)$$

и по предыдущему:

$$\mu = \arctg \left(\frac{\rho + 1}{\rho - 1} \operatorname{tg} \theta \right).$$

¹ См. гл. II, стр. 41.

Подставляя найденное значение в формулу (6') § 2, получаем следующую величину для увеличения предельного угла атаки:

$$\Delta\theta = \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{2(\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta \cos \theta_0 b \beta}. \quad (3)$$

Мы получим нижний предел соответствующего увеличения предельного угла атаки, положив $\theta = 0$; тогда:

$$\Delta\theta = \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{2\rho(\rho + 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \cos \theta_0 b \beta, \quad (3')$$

или приближенно:

$$\Delta\theta = \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{2\rho(\rho + 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \cdot b \beta. \quad (3'')$$

Заметив, что хорда основной части крыла при сделанных построениях равна 4, мы можем написать формулу (3''), откидывая член ε^2 , в виде:

$$\Delta\theta = 2 \frac{b}{L} \frac{\rho + \varepsilon}{\rho - 1 + 2\varepsilon} \frac{\beta}{\rho + 1}. \quad (4)$$

Рассмотрим числовой пример. Пусть $\frac{b}{L} = 0,2$; $\varepsilon = 0,2$; $\rho = 1,5$, тогда

$$\Delta\theta = 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{1,9}{0,9} \cdot \frac{\beta}{2,5} = 0,33 \beta.$$

Например, при $\beta = 20^\circ$ соответствующее $\Delta\theta$ равно 7° .

При увеличении ρ выражение $\Delta\theta$ убывает. Так, если в предшествующем примере взять $\rho = 2$, то получим:

$$\Delta\theta = 0,23 \beta,$$

и при $\beta = 20^\circ$ получим для $\Delta\theta$ около 5° . Этот результат совершенно ясен, так как при увеличении расстояния оси предкрылка до крыла быстро уменьшается V_a , а вместе с тем падает и интенсивность присоединенного вихря предкрылка.

Формула (4) или (3) показывает, что при увеличении ε величина $\Delta\theta$ убывает. Следовательно, предкрылок исправляет тонкие крылья лучше, чем толстые. Наибольшее значение для $\Delta\theta$ получится при $\varepsilon = 0$; тогда:

$$\Delta\theta = 2 \frac{b}{L} \frac{\rho}{\rho - 1} \frac{\beta}{\rho + 1}.$$

Полагая, как выше, $\frac{b}{L} = 0,2$; $\rho = 1,5$, получим

$$\Delta\theta = 0,41 \beta.$$

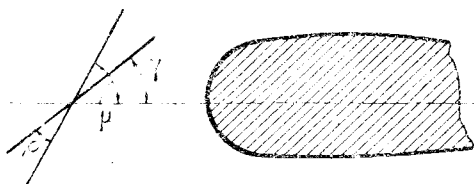
При $\beta = 20$ получим $\Delta\theta = 8^\circ$; этот результат можно применять для очень тонких крыльев.

В предыдущем мы приближенно заменяли в выражении (3) $\theta = 0$. Между тем угол θ есть угол атаки при работе предкрылка, а потому в случае, когда θ_0 около 15° и соответствующая поправка около 5° , угол θ будет около 20° ; в этом случае:

$$\cos 2\theta = \cos 60^\circ = 0,766.$$

Если подставить это значение в выражение для $\Delta\theta$, то вместо

$$\Delta\theta = \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{2\rho(\rho + 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} b \beta$$



Фиг. 52.

получим:

$$\Delta\theta' = \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{2(\rho^2 - 1)(\rho - 1 + 2\varepsilon)} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1.53}{\rho}} b \beta.$$

Следовательно:

$$\frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} = \frac{\sqrt{\rho^2 + 1 - 1.53\rho}}{\rho - 1} = \sqrt{1 + \frac{0.47\rho}{(\rho - 1)^2}}.$$

В общем случае любого θ аналогично получим:

$$k = \frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} = \sqrt{1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{(\rho - 1)^2} \rho} = \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \theta}{(\rho - 1)^2} \rho}.$$

Так как θ , как показывают опыты, колеблется от 20° до 30° , то выражение k заключается в пределах:

$$\sqrt{1 + \frac{0.47\rho}{(\rho - 1)^2}} < k < \sqrt{1 + \frac{\rho}{(\rho - 1)^2}}.$$

Подсчитаем эти границы для различных ρ :

ρ	$\sqrt{1 + \frac{0.47\rho}{(\rho - 1)^2}}$	$\sqrt{1 + \frac{\rho}{(\rho - 1)^2}}$	среднее
1,5	1,9	$\sqrt{7} = 2,6$	2,2
2	1,4	$\sqrt{3} = 1,7$	1,5
2,5	1,2	$\sqrt{2,1} = 1,4$	1,3

Так как $\Delta\theta' = k\Delta\theta$ и в действительности мы имеем увеличение угла атаки $\Delta\theta'$, то окончательно имеем формулу

$$\Delta\theta' = 2 \frac{b}{L} \frac{\rho + 2\varepsilon}{\rho - 1 + 2\varepsilon} \frac{\beta}{\rho + 1} k$$

или

$$\Delta\theta' = \Delta\theta K,$$

где для k можно брать значения, даваемые таблицей.

Например, при $\rho = 1,5$, $\frac{b}{L} = 0,2$ и $\varepsilon = 0,2$ мы видели, что $\Delta\theta = 0,33\beta$; следовательно, $\Delta\theta' = 0,72\beta$; так $\Delta'\theta = 10,8^\circ$ при $\theta_0 = 15^\circ$, т. е. предельный угол атаки равен 26° .

При $\rho = 2$, $\frac{b}{L} = 0,2$ и $\varepsilon = 0,2$ мы имели: $\Delta\theta = 0,23\beta$; так как $k = 1,5$, то $\Delta\theta' = 0,34\beta$; так $\Delta\theta' = 5^\circ$ при $\theta_0 = 15^\circ$ и предельный угол атаки равен 20° .

Если взять среднее значение для множителя при β , который, как видно, для интервала ρ от 1,5 до 2 и для θ между 20° и 30° равен около 0,5, то получаем из всего предыдущего такой результат:

$\Delta\theta' = 0,5^\circ\theta_0$ при $\frac{b}{L} = 0,2$, т. е. от действия предкрылка предельный угол атаки возрастает, приблизительно, в 1,5 раза.

Резюмируя все содержание настоящего параграфа, получим такой результат: *от действия предкрылка предельный угол атаки, при котором крыло работает на обтекание, возрастает на величину*

$$\Delta\theta = 2 \frac{b}{L} \frac{\rho + 2\varepsilon}{\rho - 1 + 2\varepsilon} \frac{1}{\rho + 1} \cdot k \cdot \beta, \quad (7)$$

где коэффициент k дается таблицей и в среднем его можно считать равным 1,8.

§ 5. Из формул (6) § 2 и (1) § 3 легко получить точную формулу для определения $\Delta\theta$, заменяющую приближенную формулу (7) § 4, но менее удобную по своей сложности для вычисления.

По формуле (6) § 2, подставляя туда значение I из § 3, имеем:

$$\sin \Delta\theta = \frac{b}{2} \beta \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)(\rho^2 - 1)} \cos \theta_0 \sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos 2\theta}, \quad (1)$$

но

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 (\theta_0 + \Delta\theta).$$

Полагая:

$$\frac{b}{2} \beta \frac{(\rho + \varepsilon)^2 \cos \theta_0}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)(\rho^2 - 1)} = 2 \frac{b}{L} \beta \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)(\rho^2 - 1)} = \cos^2 \theta_0 = A,$$

из (1) имеем:

$$\sin^2 \Delta\theta = A^2 [(\rho - 1)^2 + 4\rho \sin^2 (\theta_0 + \Delta\theta)], \quad (2)$$

или

$$\sin^2 \Delta\theta = A^2 (\rho - 1)^2 (\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta) + 4\rho A^2 (\sin^2 \theta_0 \cos^2 \Delta\theta +$$

$$+ 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Delta\theta \cos \Delta\theta + \cos^2 \theta_0 \sin^2 \Delta\theta),$$

откуда:

$$\begin{aligned} & \text{tg}^2 \Delta\theta \{A^2 (\rho - 1)^2 + 4A^2 \rho \cos^2 \theta_0 - 1\} + 4\rho A^2 \sin 2\theta_0 \text{tg} \Delta\theta + \\ & + A^2 ((\rho - 1)^2 + 4\rho \sin^2 \theta_0) = 0 \\ & \text{tg} \Delta\theta = A \frac{2A \sin 2\theta_0 \pm \sqrt{(\rho - 1)^2 + 4\rho \sin^2 \theta_0 - (\rho^2 - 1)^2 A^2}}{1 - A^2 \{(\rho - 1)^2 + 4\rho \cos^2 \theta_0\}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для выбора знака в формуле (3) заметим, что при $\theta_0 = 0$ из (3) имеем:

$$\text{tg} \Delta\theta = \pm A \frac{\sqrt{1 - (\rho + 1)^2 A^2}}{1 - (\rho + 1)^2 A^2} (\rho - 1) = \pm \frac{A(\rho - 1)}{\sqrt{1 - (\rho + 1)^2 A^2}}. \quad (4)$$

Отсюда видим, что для положительного $\text{tg} \Delta\theta$, что соответствует условиям задачи, надо взять знак плюс. Таким образом имеем окончательно следующую формулу для определения $\Delta\theta$:

$$\text{tg} \Delta\theta = A \frac{2A \sin 2\theta_0 + \sqrt{(\rho - 1)^2 + 4\rho \sin^2 \theta_0 - (\rho^2 - 1)^2 A^2}}{1 - A^2 \{(\rho - 1)^2 + 4\rho \cos^2 \theta_0\}},$$

где

$$A = 2 \frac{b}{L} \beta \frac{(\rho - \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)(\rho^2 - 1)} \cos \theta_0.$$

Рассмотрим пример. Пусть $\frac{b}{L} = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\rho = 1,5$,

$$\theta_0 = 15^\circ \text{ и } \beta = 15^\circ.$$

Тогда:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \frac{1,7^2 \cdot 0,97}{1,5 \cdot 0,9 \cdot 1,25} = 0,17,$$

$$\text{tg} \Delta\theta = 0,17 \frac{2 \cdot 0,17 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{0,25 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,07 - 0,25 \cdot 6,25 \cdot 0,0289}}{1 - 0,0289(0,25 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,97^2)},$$

или

$$\text{tg} \Delta\theta = 0,20, \quad \Delta\theta = 11^\circ 5'.$$

Следовательно, предкрылок увеличивает угол, при котором крыло работает на обтекание с 15° без предкрылка до $26^\circ 5'$ (с предкрылком). Выше при помощи приближенной формулы мы имели для приращения угла $\Delta\theta$ величину $10^\circ 8'$, близкую к найденной сейчас.

Пусть еще $\frac{b}{L}=0,2$, $\varepsilon=0,2$, $\rho=2$, $\theta_0=15^\circ$ и $\beta=15^\circ$.

Тогда:

$$A=2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4,84}{1,4 \cdot 3}=0,12$$

$$\operatorname{tg} \Delta \theta=0,12 \frac{2 \cdot 0,12 \frac{1}{2}+\sqrt{1+4 \cdot 1 \cdot 0,07-9 \cdot 0,014}}{1-0,014(1+4 \cdot 2 \cdot 0,97^2)},$$

или

$$\operatorname{tg} \Delta \theta=0,16, \Delta \theta=9^\circ.$$

Следовательно, в этом случае предкрылок увеличивает предельный угол атаки с 15 до 24° . Выше по приближенной формуле мы нашли $\Delta \theta=5$,

т. е. выведенная выше формула дает сильно уменьшенный ответ.

В предшествующих примерах мы брали угол θ_0 произвольно. Но в гл. II была дана следующая формула для вычисления предельного угла атаки без действия предкрылка:

$$\operatorname{tg} \theta_0=\frac{1,2 \varepsilon(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^2}, \quad (6)$$

причем необходимо помнить, что надо взять поправку на конечность крыла и, может быть, на то, что передняя часть работает на обтекание при углах, значительно превосходящих угол, определяемый по формуле (6). В § 8 гл. II дана формула, по которой можно вычислить угол, при котором точка отрыва струй доходит до середины крыла.

Заметим, что в формулу (5) входят углы, определяющие интенсивность вихря; если отрыв происходит вдали от передней кромки, то под углом θ в пре-

дыдущих формулах можно брать угол атаки, при котором отрыв начинается около середины крыла.

Приведенные в этом параграфе данные дают увеличение предельного угла атаки от действия предкрылка, согласное с опытными данными, но формула (6) дает для θ_0 слишком малые углы атаки; если их подставлять в формуле (5), то также получим слишком малые, несогласные с опытом значения для $\Delta \theta$. Причину этого можно видеть в соображениях этого параграфа и в данных § 8 гл. II.

Если положить $\rho=1,5$, $\theta=10^\circ$, $\beta=15^\circ$, $\varepsilon=0,2$ и $\frac{b}{L}=0,2$, то производя подобные же вычисления, получим $\Delta \theta=9^\circ$ ¹.

Вообще при уменьшении θ поправка $\Delta \theta$ уменьшается, как видно из формулы (5); при $\frac{b}{L}=0,2$, $\varepsilon=0,2$, $\rho=1,5$, $\theta=0$, $\beta=15^\circ$ имеем по (4) $\Delta \theta=6^\circ$.

¹ Благодаря влиянию величины хорды предкрылка формула (3) имеет место в гораздо более широких границах, чем (6). Ср. примеч. на стр. 42.

§ 6. Полученные результаты приводят к следующим конструктивным выводам.

Работа предкрылка сводится к выравниванию скоростей потока на верхней поверхности крыла; это выравнивание тем сильнее, чем больше интенсивность присоединенного вихря, который определяется по формулам:

$$I = \pi V_a b \beta, \quad (1)$$

или

$$I = \pi V \frac{(\rho' + \epsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\epsilon)} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta} b \beta. \quad (2)$$

Из (1) имеем следующий результат:

1. Для усиления действия предкрылка надо помещать его около передней кромки крыла, в точке, где скорость обтекающего крыло потока наибольшая.

Из (2) следует, что при увеличении ρ уменьшается J_0 . Следовательно:

2. Предкрылок нужно помещать возможно ближе к крылу, но таким образом, чтобы между предкрылком и крылом оставалось такое пространство, которое давало бы предкрылку возможность работать с образованием циркуляции вокруг него.

Далее по (2) следует, что J увеличивается с увеличением угла β . Следовательно:

3. Предкрылок надо ставить под наибольшим относительным углом атаки, при котором предкрылок работает на обтекание.

Если поставить предкрылок под таким углом атаки β , что он будет находиться в условиях, при которых происходит срыв, то вся предыдущая теория неприменима. Можно думать, что большие относительные углы атаки, при которых образуется срыв потока с предкрылка и завихренная область за предкрылком, вызывают образование турбулентного течения у верхней поверхности крыла. Таким образом, если бы улучшение свойств крыла от действия предкрылка вызывалось образованием турбулентности в обтекающем потоке, то, повидимому, выгоднее было бы ставить предкрылок под столь большими относительными углами атаки, при которых поток срывался бы с предкрылка с образованием отрыва струй.

Опыт показывает, что относительные углы атаки и предкрылка берутся такой величины, что предкрылок работает в условиях более или менее полного обтекания; повидимому, это обстоятельство может служить подтверждением того, что причину, вызывающую при наличии предкрылка улучшение летных свойств крыла, надо искать не в образовании турбулентности в обтекающем крыло потоке, а в действии присоединенных вихрей предкрылка.

Вся предшествующая приближенная теория работы предкрылка основывалась на замене предкрылка одним присоединенным вихрем; отсюда следует, что хорда предкрылка b не может быть взята во всех предыдущих формулах большей сравнительно с L , т. е. отношение $\frac{b}{L}$ есть небольшая дробь.

Но по формуле (2) видно, что интенсивность вихря возрастает с увеличением b . Отсюда следует:

4. Хорда предкрылка не должна быть очень мала сравнительно с хордой основной части крыла.

Из формулы (2) и из формулы (5) § 5 видно, что $\Delta\theta$ возрастает с увеличением угла θ_0 . Следовательно:

5. Основная часть крыла должна быть взята такого вида, чтобы она выдерживала без отрыва возможно большие углы атаки.

Мы видели в гл. II, что для этого выгодно брать крылья достаточно толстые, т. е. что наиболее выгодной величиной ε , как показывает теория, является 0,3.

§ 7. Можно привести экспериментальные данные, которые могут служить для оценки предшествующих выводов. Мы рассмотрим один интересный пример, приведенный в трудах Геттингенской лаборатории¹.

На фиг. 53 даны поляры Лилиенталя для разрезного крыла при различных положениях предкрылка.

Расположение 3a. Предкрылок расположен далеко от крыла и относительный угол атаки мал. По предыдущим выводам и то и другое невыгодно; следовательно, это расположение с теоретической стороны неудачно и не может дать значительного улучшения свойств крыла.

Расположение 3b. Предкрылок поставлен далеко от передней кромки в области, где скорость потока относительно не велика, кроме того, велико и расстояние предкрылка вообще от поверхности крыла.

Предыдущее показывает, что это расположение невыгодно: предкрылок не может дать значительного улучшения.

Расположение 3c. Предкрылок поставлен близко к крылу в области, где скорость наибольшая; относительный угол атаки значительный. Расположение теоретически выгодно.

Расположение 3d (с закрытой щелью между крылом и предкрылком).

Крыло работает как сплошное; полость между крылом и предкрылком, заполненная воздухом, способствует образованию в ней вихрей, увеличивающих лобовое сопротивление.

Общий вывод тот, что наиболее выгодное расположение 3c. Это и подтверждается видом кривых Лилиенталя; кривая 3c дальше всего идет эквидистантно параболе индуктивного сопротивления, и следовательно, работает в условиях обтекания потоком. Следовательно, экспериментальные данные подтверждают полученные выше теоретические выводы.

Остановимся еще на одном приложении предшествующих выводов. Известно, что у крыльев очень тонких или с острой передней кромкой отрыв потока от крыла и образование струй должно начинаться при малых углах атаки; однако практически этого, обычно, не наблюдается. Наоборот, такие крылья часто работают очень хорошо, причем они работают в условиях более или менее полного обтекания. Причину этого надо искать в образовании вихрей у передней кромки крыла² (фиг. 54); но такой вихрь впереди крыла играет роль предкрылка, а потому он вызывает по предыдущему увеличение углов атаки, при которых возможно обтекание без срывов; отличие от предкрылка будет только в меньшей устойчивости этого вихря сравнительно с предкрылком, а потому и в более слабом действии вихря на выравнивание скоростей на верхней поверхности крыла.

Возможно, что подобным же образом можно объяснить и действие щитка, поставленного у цилиндра, на обтекание цилиндра. Проф. Крэллю (O. Krell) принадлежат интересные опыты о влиянии заслонок, поставленных у цилиндра, на обтекание цилиндра³.

На фиг. 55 изображено течение вокруг круглого гладкого цилиндра; точки отрыва начинаются приблизительно при удалении на 45° от точки разделения струй. На фиг. 56 имеем обтекание такого же цилиндра, у которого

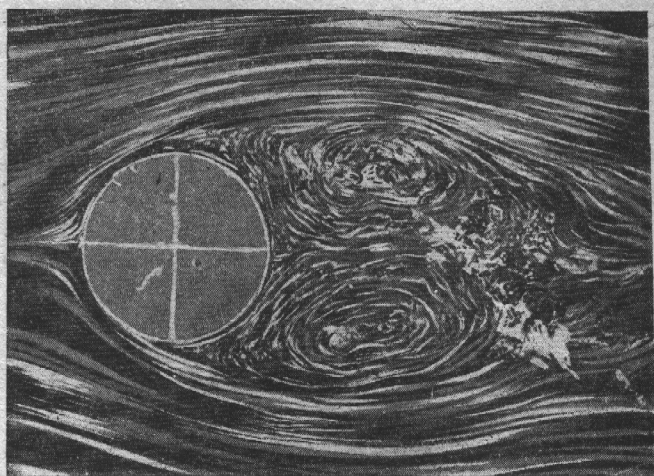
¹ „Ergebnisse d. Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen“, II Lieferung, 1923, S. 57.

² См., например, В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана конечного размаха. Стр. 239.

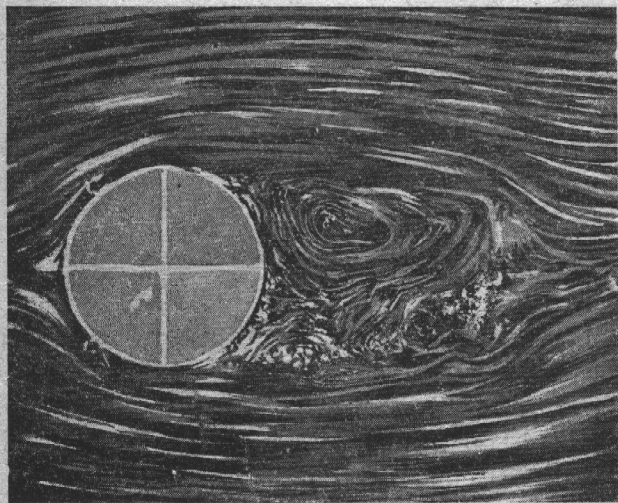
³ Druckverteilung an der luftumströmten Kugel, „Zeitschrift f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt“, Jahrg. 22, №4, 1931, S. 97.

под углом 45° от точки разделения потока поставлены перпендикулярно к поверхности цилиндра тонкие перегородки. В этом случае отрыв струй начинается значительно дальше от точки разделения потока (приблизительно под углом 120°).

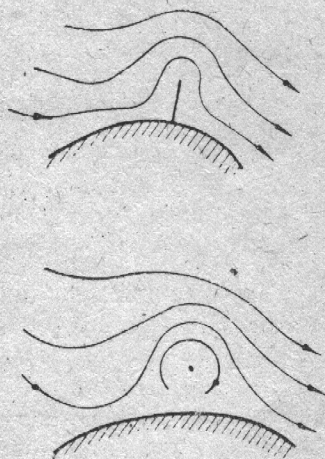
Обычное объяснение этого состоит в том, что перегородки вызывают у потока турбулентность, а турбулентный поток (по причинам, в настоящее время не выясненным) лучше прилегает к обтекаемым телам, чем поток нетурбулентный. Но можно объяснить это явление, исходя из приведенных выше соображений. Действительно, если предположить, что поток обтекает перегородку без отрыва, то перегородка может быть заменена вихрем (фиг. 57), который направлен как вихрь предкрылка. Такой вихрь должен уменьшать скорость перегородки, а потому, если перегородка поставлена в точке цилиндра, где скорость наибольшая, то она выравнивает распределение скоростей на поверхности цилиндра, а потому вызывает перемещение точки отрыва струй далее от



Фиг. 55.



Фиг. 56.



Фиг. 57.

точки разделения потока. Надо, впрочем, помнить, что у поверхности цилиндра давление, как показывают опыты, изменяется не по линейному закону, а потому к этому случаю изложенная выше теория неприменима; возможно, что применение соображений, приведенных в гл. II¹, позволит перенести и на случай цилиндра соображения, аналогичные изложенным выше. Случай цилиндра оказывается здесь гораздо более сложным, чем случай крыла.

¹ См: стр. 50.

§ 8. Все предыдущие соображения можно применить обратно к действию крыла на предкрылок. Для вывода соответствующей формулы возьмем уравнение (5) § 1 настоящей главы. Если считать, что хорда предкрылка перпендикулярна к действительной оси, по которой направлена хорда основного крыла (фиг. 58), то

Фиг. 58.

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ и формулы (5) имеют вид:

$$V_0 = \left[2V \cos \beta - \frac{\Gamma \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)}{\pi \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)^2} \right] \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \quad (1)$$

и

$$V_{\max} = 2V \sin \beta \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2\varepsilon} \quad (1')$$

Отсюда

$$\frac{V_0}{V_{\max}} = \left[\operatorname{ctg} \beta - \frac{\Gamma(\rho^2 - 1)\rho}{2\pi(\rho^2 + 1)^2 \sin \beta V} \right] \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

Так как для срыва должно выполняться условие $\frac{V_{\max}}{V_0} = 1,2$, то:

$$\operatorname{ctg} \beta - \frac{\Gamma(\rho^2 - 1)\rho}{2\pi(\rho^2 + 1)^2 \sin \beta} = \frac{(1 + \varepsilon)^2}{1,2(1 - \varepsilon)\varepsilon}. \quad (2)$$

Так как для срыва при отсутствии добавочного вихря выполняется условие:

$$\operatorname{ctg} \beta_0 = \frac{1,2(1 - \varepsilon)\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2},$$

то из (2)

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \beta_0 = \frac{\Gamma(\rho^2 - 1)\rho}{2\pi V(\rho^2 + 1)^2 \sin \beta},$$

или

$$\sin(\beta - \beta_0) = -\frac{\Gamma(\rho^2 - 1)\rho}{2\pi V(\rho^2 + 1)^2} \sin \beta_0.$$

Так как циркуляция Γ отрицательна для рассматриваемого случая, то полагая $\Gamma = -I$, получим:

$$\sin(\beta - \beta_0) = \frac{I(\rho^2 - 1)\rho}{2\pi V(\rho^2 + 1)^2} \sin \beta_0. \quad (3)$$

Здесь I есть величина циркуляции основной части крыла; по известной формуле:

$$I = V_{\infty} \pi l \sin \beta,$$

где l — хорда основной части и β — угол атаки. Следовательно:

$$\sin(\beta - \beta_0) = \frac{V_{\infty} l \sin \theta \sin \beta_0 \rho(\rho^2 - 1)}{2V(\rho^2 + 1)^2}, \quad (4)$$

где V — скорость потока, которую он имел бы в отсутствии предкрылка около его оси, β_0 — угол атаки, поддерживаемый без отрыва струи предкрылком, взятым для крыла, θ — угол атаки крыла.

Пусть расстояние от середины крыла до оси предкрылка равно R ($R > \frac{l}{2}$); тогда для определения скорости на оси предкрылка можно применить формулу:

$$V_a = V_\infty \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos 2\theta} \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)}, \quad (5)$$

где, однако, нужно вести поправку на изменение масштаба. Хорда крыла равна l ; следовательно, радиус круга, изображающего сечение основного крыла, когда оно преобразуется в окружность, равен $\frac{l}{4}$. В формуле (5) соответствующий радиус принимается равным 1; поэтому, чтобы применить формулу (5) к настоящему случаю, нужно вместо ρ поставить отношение

$$\frac{\rho_1}{\frac{l}{4}} = \frac{4\rho_1}{l},$$

где ρ_1 — величина, характеризующая удаление предкрылка от основной части крыла. Приблизительно можно принять, что расстояние до середины крыла, назовем его R , выражается по формуле $R = \rho_1 + \frac{1}{\rho_1}$, так как, если считать малыми α и ε , то переход от круглого цилиндра к крылу дается формулой $t = z + \frac{1}{z}$ и $z = -\rho$ и $t = -R$. При этих условиях получим:

$$V_a = V_\infty \sqrt{1 + \frac{l}{4\rho_1} - \frac{l}{2\rho_1} \cos 2\theta} \frac{\left(\frac{4\rho_1}{l} + \varepsilon\right)^2}{\frac{4\rho_1}{l} \left(\frac{4\rho_1}{l} - 1 + 2\varepsilon\right)}. \quad (6)$$

Так как приблизительно можно считать, что несущий вихрь, заменяющий основное крыло, находится на расстоянии $\frac{l}{3}$ от его передней кромки, то расстояние от оси вихря до оси предкрылка получится по формуле:

$$\rho = \rho_1 + \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2}{\rho_1} - \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \rho_1 + \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2}{\rho_1} - \frac{l}{6}.$$

Окончательно получим:

$$\sin(\beta - \beta_0) = \frac{V_\infty l \sin \theta \sin \beta_0 \rho (\rho^2 - 1)}{2V(\rho^2 + 1)^2},$$

$$\rho = \rho_1 + \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2}{\rho_1} - \frac{l}{6}. \quad (7)$$

$$V = V_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{l}{4\rho_1}\right)^2 - \frac{l}{2\rho_1} \cos 2\theta} \frac{\left(\frac{4\rho_1}{l} + \varepsilon\right)^2}{\frac{4\rho_1}{l} \left(\frac{4\rho_1}{l} - 1 + 2\varepsilon\right)}.$$

Формулы (7) и решают задачу о величине изменения предельного угла предкрылка под действием основного крыла. На фиг. 59 даны геометрические значения l , ρ .

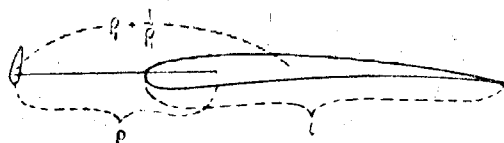
Рассмотрим пример: $l = 10$, $\frac{4\rho_1}{l} = 1,5$; $\rho_1 = 3,75$; $\theta = 25^\circ$; $\beta_0 = 15$;

$$V = V_\infty \frac{\rho = 3,75 + 1,66 - 1,66 = 3,75}{\sqrt{1 + 2,25 - 3 \cdot 0,64}} \frac{1,8^2}{1,5 \cdot 21} = 0,75 V_\infty;$$

$$\sin(\beta - \beta_0) = \frac{10 \cdot 0,42 \cdot 0,26 \cdot 3,75 \cdot 13,06}{3 \cdot 226,8} = 0,08;$$

$$\beta - \beta_0 = 4,5^\circ.$$

Таким образом приращение угла получается меньше, чем для основного крыла. Это объясняется неблагоприятным расположением вихря относительно предкрылка.



Фиг. 59.

Нужно, конечно, смотреть на приведенные здесь вычисления только как на определение порядка поправки, так как все расчеты приближенные.

§ 9. Выведем общую формулу, дающую распределение скоростей у поверхности предкрылка. В § 1 настоящей главы дана формула (4):

$$\frac{dw}{dz} = \left[V e^{-\theta i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho} e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right) \left(z - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right)} - \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})(z - \rho e^{\varphi i})} \right\} \right] \cdot e^{\frac{\alpha}{2} i} \frac{\left[\left(z - 1 \right) e^{-\frac{\alpha}{2} i} + \left(1 - \varepsilon \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2}{z \left[\left(z - 1 \right) e^{-\frac{\alpha}{2} i} + 2 \left(1 - \varepsilon \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right]}.$$

Пусть $z = e^{\lambda i}$, тогда:

$$V e^{-\theta i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) = V e^{-\frac{\lambda}{2} i} \left(e^{-\left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) i} + e^{\left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) i} \right) = 2V \cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) e^{-\frac{\lambda}{2} i};$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho} e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right) \left(z - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right)} - \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})(z - \rho e^{\varphi i})} \right\} = \frac{\Gamma e^{\varphi i} \rho}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{(\rho - e^{\varphi i})(z \rho - e^{\varphi i})} - \frac{1}{(1 - \rho e^{\varphi i})(z - \rho e^{\varphi i})} \right\} = - \frac{\Gamma \rho (\rho^2 - 1) \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \varphi \right) e^{-\frac{\lambda}{2} i}}{\pi (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \varphi)(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos(\varphi - \lambda))}. \quad (1)$$

Следовательно:

$$\left| V e^{\theta i} \left(1 + \frac{e^{2\theta i}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho} e^{\varphi i}}{\left(1 - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right) \left(z - \frac{1}{\rho} e^{\varphi i} \right)} - \frac{\rho e^{\varphi i}}{(1 - \rho e^{\varphi i})(z - \rho e^{\varphi i})} \right\} \right| =$$

$$= 2V \cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) - \frac{\Gamma \rho (\rho^2 - 1) \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \varphi \right)}{\pi (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \varphi) (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos (\varphi - \lambda))}.$$

При малом α , полагая $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$, $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$:

$$\left| (z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + (1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} \right|^2 = (1-\varepsilon^2) - 2\varepsilon \cos \lambda,$$

$$(z-1)e^{-\frac{\alpha}{2}i} + 2(1-\varepsilon) \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + (1-2\varepsilon)^2 + 2(1-2\varepsilon) \cos \lambda}.$$

Из (1) окончательно имеем:

$$V_\lambda = \left[2V \cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{l}{\pi} \frac{\rho (\rho^2 - 1) \sin \left(\frac{\lambda}{2} - \varphi \right)}{(\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \varphi) (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos (\varphi - \lambda))} \right] \times \\ \times \frac{(1 + \varepsilon^2) - 2\varepsilon \cos \lambda}{\sqrt{1 + (1-2\varepsilon)^2 + 2(1-2\varepsilon) \cos \lambda}}. \quad (2)$$

Рассмотрим скорости на задней половине верхней поверхности крыла, т. е. когда $\frac{\lambda}{2} < \frac{\pi}{4}$. Так как $\theta < \frac{\pi}{4}$, то $\cos \left(\theta - \frac{\lambda}{2} \right) > 0$. Если $\sin \left(\frac{\lambda}{2} - \varphi \right) > 0$, то второй член в скобках формулы (2) показывает, что в рассматриваемой области поверхности крыла скорость увеличивается от присутствия вихря l , а следовательно, давление уменьшается.

Таким образом присутствие около крыла добавочного вихря может вести к выравниванию давления около верхней поверхности крыла; такой эффект вызывает присутствие крыла у предкрылка. Для определения величины выравнивания рассмотрим следующий числовой пример.

Пусть угол атаки предкрылка $\theta = 15^\circ$, угол атаки основной части крыла $\beta = 20^\circ$, $\varphi = -60^\circ$, $\rho = 4$, $\varepsilon = 0$ и хорда основной части крыла равна l . Тогда $J = \pi V l \sin \beta = \pi V l \cdot 0,34$.

Подставляя в формулу (2), получим:

$$V_\lambda = \left[2V \cos \left(15^\circ - \frac{\lambda}{2} \right) + V l \cdot 0,34 \frac{4 \cdot 15}{13} \frac{\sin \left(\frac{\lambda}{2} + 60^\circ \right)}{17 - 8 \cos (60^\circ + \lambda)} \right] \frac{1}{2 \cos \frac{\lambda}{2}},$$

или

$$V_\lambda = V \left[\frac{\cos \left(15^\circ - \frac{\lambda}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} + l \cdot 0,78 \frac{\sin \left(\frac{\lambda}{2} + 60^\circ \right)}{[17 - 8 \cos (60^\circ + \lambda)] \cos \frac{\lambda}{2}} \right]. \quad (3)$$

Вычислим по этой формуле V_λ при значениях λ , равном 0° , 45° , 90° и 135° . Получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda = 0^\circ, \quad V_\lambda &= V(0,97 + l \cdot 0,052), \\ \lambda = 45^\circ, \quad V_\lambda &= V(1,08 + l \cdot 0,044), \\ \lambda = 90^\circ, \quad V_\lambda &= V(1,22 + l \cdot 0,044), \\ \lambda = 135^\circ, \quad V_\lambda &= V(1,60 + l \cdot 0,065). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматривая полученные выражения, видим, что можно подобрать такое l , при котором от $\lambda = 0$ до $\lambda = 90^\circ$ (т. е. на задней половине верхней поверхности крыла) скорость постоянна.

Для этого, очевидно, должно быть:

$$1,22 + l \cdot 0,44 = 0,97 + l \cdot 0,052,$$

откуда $l = 31,25$

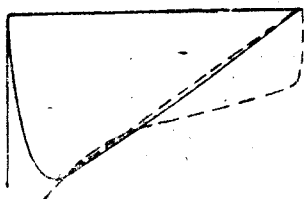
Так как при сделанном предположении ($\varepsilon = 0$) предкрылок представляет собой плоскую пластинку длины 4, то хорда крыла приблизительно в 8 раз длиннее хорды предкрылка.

Отрезок хорды крыла, на которой скорость и давление постоянны, равен $l_1 = 2 + 1,41 = 3,41$, т. е. составляет $\frac{3,4}{4} = 0,85$ всей верхней поверхности крыла.

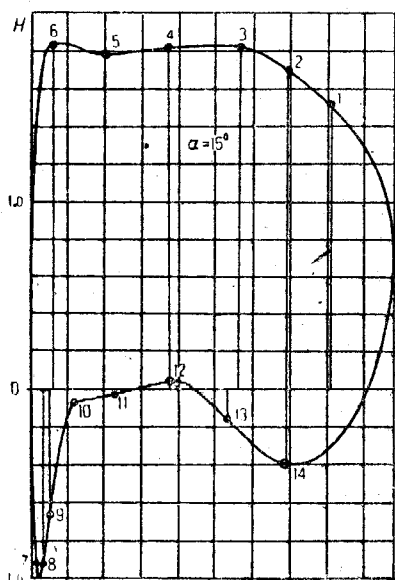
Таким образом распределение скоростей и давлений на верхней поверхности крыла принимает совершенно необычный для крыла вид. Схематически распределение давлений указано на фиг. 60 вместо обычного распределения, указанного сплошной линией.

Экспериментальные данные вполне подтверждают приведенные выводы.

Приводим график фиг. 61 распределения



Фиг. 60.



Фиг. 61.

давлений на предкрылках по данным измерений ЦАГИ¹ (угол атаки крыла 15°).

Подобным же образом можно подсчитать давление и на нижней поверхности крыла, но определение величины давления на ней едва ли можно надежно выполнить предыдущим способом. Близость основной части крыла и сравнительно узкий проход, который остается между задней кромкой предкрылка и основной частью крыла, значительно уменьшают скорость подкрылка; этого обстоятельства нельзя учесть, если влияние основной части заменяется вихрем.

§ 10. Результаты предыдущего параграфа указывают на возможность распределения давлений на верхней поверхности крыла, приближающегося к прямоугольному, т. е. замены действительного распределения давлений вида ABC (фиг. 62) распределением давлений вида $AB'C$ (фиг. 62). Такое равномерное

распределение подсасывающей силы на верхней поверхности крыла во многих отношениях представляет значительные выгоды; отсюда намечается задача, какими техническими приспособлениями можно добиться в значительном интервале углов атаки равномерного распределения скоростей и давлений на верхней поверхности крыла.

Вероятно, этого можно достигнуть подсасыванием потока у задней кромки крыла, благодаря чему увеличивается скорость у задней кромки крыла. Такого же эффекта можно добиться размещением вихрей вблизи поверхности крыла, частный случай чего как раз и представляет разобранное выше разрезное крыло.

¹ За сообщение материалов приношу мою глубокую благодарность инж. П. П. Красильникову.

SUMMARY

The purpose of the paper is to develop a hydro-dynamic theory of the action of an auxiliary airfoil on a two-dimensional flow.

Experimental data indicates that the action of an auxiliary airfoil results in the increase of the angles of attack corresponding to a smooth streamline flow over the airfoil. The work consequently is carried along the lines of solution of two problems:

1. Determination of the conditions under which the breakdown of the flow over the upper surface begins to take place.

2. Determination of the effect of the auxiliary airfoil on the conditions causing the breakaway of the stream lines from the surface of the airfoil.

The first problem is solved with the use of Prandtl's Boundary Layer Theory, which makes it possible to determine the point of breakaway of the stream lines. This theory generally very complicated lend itself to a simplification for the case at hand. The simplification is possible because according to experimental data the pressure distribution over the upper surface of the airfoil, in the interval between the surface of the airfoil between the point of minimum pressure and the point of breakdown of the flow, is linear. Using Pohlhausen's method for the approximate integration of Prandtl's equations the following expression is obtained for the thickness of the layer.

$$\frac{U'dx}{U} = \frac{-213.12 + 5.76\lambda + \lambda^2}{-7257.6 + 1599.4\lambda - 39.8\lambda^2 - \lambda^3} dx = R(\lambda)dx, \quad (1)$$

where U is the velocity at the outer limit of Prandtl's layer $\lambda = U \frac{h^2}{\nu}$ his thickness of the layer and ν is the kinematic coefficient of viscosity. Noting, that at the point of minimum pressure $U'(x) = 0$ and $\lambda = 0$ also that according to Pohlhausen's theory at the point of breakaway of the stream lines $\lambda = -12$, the following equation is obtained from (1)

$$\frac{U_m}{U_0} = e^{\int_{-12}^0 R(\lambda) d\lambda} = 1.2$$

where U_m is the maximum velocity along the upper surface of the airfoil and U_0 is the velocity at the point of breakaway.

Thus, for a linear distribution of pressures over the upper surface of the airfoil, the ratio of the maximum stream velocity to the point of breakaway is equal to 1.2.

Selecting an airfoil of Joukowski's type and calculating the velocities at the leading (U_m) and trailing (U_0) edges we obtain:

$$U_m = V \sin \theta \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad U_0 = V \cos \theta (1 - \varepsilon).$$

Assuming that there is no breakdown of the flow, we have from the foregoing $\frac{U_m}{U_0} = 1.2$ and therefore

$$\operatorname{tg} \theta = 1.2 \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2}, \quad (2)$$

where ε is a parameter characterising the relative thickness of the airfoil.

From (2) it is possible to obtain the limiting angles of attack corresponding to a smooth streamline flow over an airfoil. Thus,

$$\begin{array}{lcl} \text{when } \varepsilon = 0.2, & \text{the corresponding } \theta = 8^\circ \\ \varepsilon = 0.3 & & \theta = 8.5^\circ. \end{array}$$

The maximum value of θ is obtained when $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

It is possible also to make certain deductions for Lilienthal's Polar Curve for thin (ε is small) and thick (ε is large) airfoils.

In the solution of the second problem the auxiliary airfoil, in view of its relatively small size, is substituted by a vortex. The position of this vortex being unchangable with respect to the main airfoil, its effect is to decrease the velocity at the leading edge (U_m) and leave the velocity at the trailing edge (U_m) unchanged. The result is an increase in the value of the angle θ .

This increment $\Delta\theta$ is given by the following equation:

$$\operatorname{tg} \Delta\theta = A \frac{2 \sin 2\theta + \sqrt{(\rho - 1)^2 + 4\rho \sin^2 \theta - (\rho^2 - 1)^2 A^2}}{1 \cdot A^2[(\rho - 1)^2 + 4\rho \cos^2 \theta]} \quad (3)$$

where

$$A = 2 \frac{b}{L} \beta \frac{(\rho + \varepsilon)^2}{\rho(\rho - 1 + 2\varepsilon)(\rho^2 - 1)} \cos \theta.$$

In the above equations L is the chord of the main airfoil, b is the chord of the auxiliary airfoil, β is the relative angle of attack of the auxiliary airfoil and ρ is distance between the axes of the main and auxiliary airfoils. The definition of ε remains as given elsewhere.

Applying equation (3) to an example:

we have $\frac{b}{L} = \frac{1}{5}$; $\varepsilon = 0.2$; $\rho = 1.5$; $\theta = 10^\circ$ and $\beta = 15^\circ$;

substituting, we obtain:

$$\Delta\theta = 9^\circ.$$

From the foregoing several constructive deductions are obtainable:

- 1) For the greatest effectiveness of the auxiliary airfoil it must be placed at the leading edge of main airfoil where the stream velocity is maximum.
- 2) The auxiliary airfoil must be placed as close as possible to the main airfoil. At the same time its position must be such that the resulting slot is sufficient to permit undisturbed flow (without a breakaway) over the entire auxiliary airfoil.
- 3) The auxiliary airfoil must be set with a small relative angle of attack, corresponding to a smooth streamline flow over the main airfoil.
- 4) The ratio chords of the auxiliary airfoil and the main airfoil must not be small.
- 5) The selection of the main airfoil must be made with the purpose of obtaining a smooth streamline flow at the greatest possible angle of attack.

The paper is divided into three chapters. The first is devoted to the analysis, of the experimental data and presentation of general starting considerations.

The second chapter deals with problem of the breakaway of the streamline from the upper surface of the airfoil; the final is devoted to the study of the effect of the auxiliary airfoil.

